Вестник Череповецкого государственного университета. 2025. № 1 (124). С. 59–69.
Cherepovets State University Bulletin, 2025, no. 1 (124), pp. 59–69.

Научная статья
УДК 330.4
https://elibrary.ru/esannq
https://doi.org/10.23859/1994-0637-2025-1-124-5

Использование комбинированных функций потерь при построении вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей

Сергей Иванович Носков[1], Александра Романовна Чекалова[2]✉
[1, 2] Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Россия
[1]sergey.noskov.57@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720
[2]✉chekalova49@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-3811-9051

Аннотация. В работе дан краткий обзор публикаций по использованию различных функций потерь при построении регрессионных моделей сложных объектов. В частности, рассмотрены: новая выпуклая функция штрафных потерь, используемая в модели регрессии опорного вектора; квантильная функция потерь для подбора модели нечеткой регрессии с нечеткими коэффициентами, когда объясняющие переменные и переменная отклика представляют собой нечеткие числа; обобщенная невыпуклая и недифференцируемая функция потерь; двухкритериальная сбалансированная функция потерь Зеллнера; усеченная функция потерь Хубера; робастные функции потерь для изучения сетей глубокой регрессии; двумерная эмпирическая функция потерь на основе исторических данных; усеченные функции логистических потерь. Рассмотрены известные кусочно-линейные регрессионные модели: функции Леонтьева и риска, вложенные регрессии. При выборе в качестве подхода к оцениванию их параметров метода наименьших модулей задачи параметрической идентификации таких моделей сводятся к задачам линейно-булева программирования. Описан вычислительный прием, позволяющий путем расширения этих задач получать компромиссные оценки параметров за счет применения комбинированной функции потерь. При этом вводятся новые ограничения в исходную задачу ЛБП, а в ее целевую функцию – две новые компоненты и весовые коэффициенты. Рассмотрен иллюстративный пример.

Ключевые слова: вложенные кусочно-линейные регрессии, функции Леонтьева и риска, метод наименьших модулей, функция потерь, компромиссные оценки параметров, задача линейно-булева программирования

Для цитирования: *Носков С. И., Чекалова А. Р.* Использование комбинированных функций потерь при построении вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей // Вестник Череповецкого государственного университета. 2025. № 1 (124). С. 59–69. https://doi.org/10.23859/1994-0637-2025-1-124-5; EDN: ESANNQ

© Носков С. И., Чекалова А. Р., 2025

The use of combined loss functions in the construction of nested piecewise linear regression models

Sergey I. Noskov[1], Alexandra R. Chekalova[2]✉
[1, 2] Irkutsk State Transport University,
Irkutsk, Russia
[1]sergey.noskov.57@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720
[2]✉chekalova49@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-3811-9051

Abstract. The paper provides a brief overview of publications on the use of various loss functions in the construction of regression models of complex objects. In particular, the following issues are considered: a new convex penalty loss function used in the regression model of the reference vector; a quantile loss function for selecting a fuzzy regression model with fuzzy coefficients when the explanatory variables and the response variable are fuzzy numbers; a generalized non-convex and undifferentiated loss function; a two-criterion Zellner's balanced loss function; a truncated Huber loss function; robust loss functions for studying deep regression networks; two-dimensional empirical loss function based on historical data; truncated logistic loss functions. The authors also consider the well-known piecewise linear regression models: Leontiev and risk functions, nested regressions. When choosing the method of least modules as an approach to estimating their parameters, the problems of parametric identification of such models are reduced to linear Boolean programming problems. The paper also focuses on a computational technique that allows, by expanding these tasks, obtaining compromise estimates of parameters by using a combined loss function. At the same time, new restrictions are introduced into the original LBP problem, and two new components and weight coefficients are introduced into its target function. The authors analyse an illustrative example.
Keywords: nested piecewise linear regression, Leontiev and risk functions, method of least modules, loss function, compromise parameter estimates, linear Boolean programming problem
For citation: Noskov S. I., Chekalova A. R. The use of combined loss functions in the construction of nested piecewise linear regression models. *Cherepovets State University Bulletin*, 2025, no. 1 (124), pp. 59–69. (In Russ.) https://doi.org/10.23859/1994-0637-2025-1-124-5; EDN: ESANNQ

Введение

При построении математических моделей регрессионного типа для сложных технических и социально-экономических объектов большое значение имеет правильный выбор функций потерь, устанавливающих способы задания расстояния (метрики) между реальными, заданными и расчетными значениями выходных переменных. Не всегда этот выбор является простым. Так, в статье P. Anand, R. Khemchandani, S. Chandra[1] предлагается новая выпуклая функция потерь, называемая функцией штрафных потерь, которая используется в модели регрессии опорного вектора. Показано, что функция штрафных потерь оптимальна для более общего распределения шума. Популярные в регрессионном анализе нечувствительная функция потерь и функция потерь Лапласа являются частными случаями предлагаемой функции потерь. На основе данной функции предложены две новые модели регрессии опорного

[1] Anand P., Kremchandani R., Chandra S. A class of new Support Vector Regression models // Applied Soft Computing. 2020. Vol. 94. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106446

вектора – регрессия вектора поддержки штрафа и регрессия вектора поддержки штрафа за норму. В статье M. Arefi, A. H. Khammar[1] представлен новый подход для подбора модели нечеткой регрессии с нечеткими коэффициентами, когда объясняющие переменные и переменная отклика представляют собой нечеткие числа. Вводится нелинейная функция для прогнозирования переменных ответа на основе функции ядра. Для оценки параметров регрессионной модели целевая функция рассчитывается с использованием квантильной функции потерь на нечетких числах. Исследование K. Wang, W. Zhu, P. Zhong[2] посвящено описанию надежной регрессии опорного вектора, основанной на обобщенной невыпуклой и недифференцируемой функции потерь с гибким наклоном и запасом. Она аппроксимируется путем объединения двух дифференцируемых функций Хубера, а результирующая задача оптимизации представляет собой программу разности выпуклых функций. В статье A. K. Bansal, P. Aggarwal[3] рассматривается модель стратифицированной регрессии суперпопуляции с формированием байесовского предиктора конечного среднего значения численности населения в соответствии с двухкритериальной сбалансированной функцией потерь Зеллнера. Этот предиктор упрощается до линейной комбинации выборочных и прогностических характеристик, более того, он сводится к некоторым известным классическим и байесовским предикторам. В статье G. Hu, P. Peng[4] в рамках сбалансированной функции потерь обсуждается приемлемость линейных оценок коэффициентов регрессии в линейных моделях с предположением о нормальности основного распределения и без него. В ненормальном случае дано необходимое и достаточное условие допустимости линейных оценок в пространстве однородных линейных оценок. В нормальном случае обеспечивается достаточное условие допустимости ограниченных линейных оценок в пространстве всех оценок, имеющих конечные риски при сбалансированной функции потерь. В работе C. Chen, C. Yan, N. Zhao, B. Guo, G. Liu[5] предлагается надежный способ построения регрессии методом опорных векторов с усеченной функцией потерь Хубера. Моделирование восьми наборов контрольных данных показывает, что этот способ в среднем более точен, чем другие методы, когда выборка загрязнена выбросами. В публикации

[1] Arefi M., Khammar A. H. Nonlinear prediction of fuzzy regression model based on quantile loss function // Application of soft computing. 2024. Vol. 28, no. 6. P. 4861–4871. https://doi.org/10.1007/S00500-023-09190-w

[2] Wang K., Zhu W., Zhong P. Robust Support Vector Regression with Generalized Loss Function and Applications // Neural Processing Letters. 2015. Vol. 41, no. 1. P. 89–106. https://doi.org/10.1007/s11063-013-9336-3

[3] Bansal A. K., Aggarwal P. Bayes Prediction for a Stratified Regression Superpopulation Model Using Balanced Loss Function // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2010. Vol. 39, no. 15. P. 2789–2799. https://doi.org/10.1080/0361093128911

[4] Hu G., Peng P. All admissible linear estimators of a regression coefficient under a balanced loss function // Journal of Multivariate Analysis. 2011. Vol. 102, no. 8. P. 1217–1224. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.04.003

[5] Chen C., Yan C., Zhao N., Guo B., Liu G. A robust algorithm of support vector regression with a trimmed Huber loss function in the primal // Soft Computing. 2017. Vol. 21, no. 18. P. 5235–5243. https://doi.org/10.1007/s00500-016-2229-4

F. Dornaika, S. E. Bekhouche, I. Arganda-Carreras[1] описывается использование робастных функций потерь для изучения сетей глубокой регрессии при оценке возраста: с ошибками в норме l_1 и функции адаптивных потерь, которая сохраняет преимущества норм l_1 и l_2. Экспериментальные результаты, полученные в четырех общедоступных базах данных, показывают, что изучение глубокой регрессии с устойчивыми потерями может улучшить оценку возраста. В статье R. C. Byung[2] рассматривается двумерная эмпирическая функция потерь на основе исторических данных, связанных с производительностью продукта и связанными с ней потерями клиентов, а также предлагается схема оптимизации для наиболее экономичной цели процесса. В работе S. Y. Park, Y. Liu[3] предлагаются усеченные функции логистических потерь и три расчетных схемы для оценки вероятностей условных классов. Наконец, в статье X. Yuan, X. Zhang, W. Guo, Q. Hu[4] исследуется адаптированная функция потерь для оценки линейной регрессии с цензурированными справа ответами. Эту функцию потерь можно использовать в составной квантильной регрессии, которая является хорошим методом обработки ответов с высокой цензурированной частотой.

Основная часть

Будем полагать, что при анализе исследуемого средствами регрессионного моделирования объекта выявилось, что значения выходной (зависимой) переменной (фактора) y на предыстории процесса определяется значениями входных (независимых) переменных x_1, x_2, …, x_m. Или, другими словами, что имеет место регрессионная связь (модель):

$$y_k = F\left(\alpha; x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}\right) + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где F – аппроксимирующая функция, α – вектор подлежащих вычислению оценок параметров, ε – ошибки аппроксимации, k – номер наблюдения выборки, n – ее длина. Будем полагать также, что все переменные в модели (1) детерминированы.

Аппроксимирующая функция F в модели (1) может быть как линейной по параметрам и независимым переменным, так и существенно нелинейной. Так, в при-

[1] Dornaika F., Bekhouche S. E., Arganda-Carreras I. Robust regression with deep CNNs for facial age estimation: An empirical study // Expert Systems with Applications. 2020. Vol. 141. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.112942

[2] Byung R. C. Optimum Process Target for Two Quality Characteristics Using Regression Analysis // Quality Engineering. 2002. Vol. 15, no. 1. P. 37–47. https://doi.org/10.1081/QEN-120006709

[3] Park S. Y., Liu Y. Robust penalized logistic regression with truncated loss functions // Canadian Journal of Statistics. 2011. Vol. 39, no. 2. P. 300–323. https://doi.org/10.002/cjs.10105

[4] Yuan X., Zhang X., Guo W., Hu Q. An adapted loss function for composite quantile regression with censored data // Computational Statistics. 2024. Vol. 39, no. 3. P. 1371–1401. https://doi.org/10.1007/s00180-023-013526

кладном анализе данных часто используются кусочно-линейные конструкции – функция Леонтьева:[1]

$$y_k = \min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\} + \varepsilon_k^1, \quad I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}, \quad k = \overline{1, n} \tag{2}$$

и функция риска:[2]

$$y_k = \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\} + \varepsilon_k^2, \quad J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3}$$

В работах С. И. Носкова[3] описаны вложенные кусочно-линейные регрессионные модели:

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа:

$$y_k = \min\{\min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\}\} + \varepsilon_k^3, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4}$$

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа:

$$y_k = \max\{\min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\}\} + \varepsilon_k^4, \quad k = \overline{1, n}, \tag{5}$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа:

$$y_k = \min\{\min_{i\in I^1}\{a_i^1 x_{ki}\}, \ldots, \min_{i\in I^G}\{a_i^G x_{ki}\}\} + \varepsilon_k^5, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6}$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа:

$$y_k = \max\{\max_{i\in J^1}\{\beta_i^1 x_{ki}\}, \ldots, \max_{i\in J^H}\{\beta_i^H x_{ki}\}\} + \varepsilon_k^6, \quad k = \overline{1, n}. \tag{7}$$

В том случае, если в качестве метода оценивания параметров кусочно-линейных регрессий (2) – (7) выбран метод наименьших модулей (МНМ), состоящий в решении задач:

---

[1] Носков С. И., Лоншаков Р. В. Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2008. № 6. С. 63–64. EDN: WFBAMJ

[2] Носков С. И., Хоняков А. А. Применение функции риска для моделирования экономических систем // Южно-Сибирский научный вестник. 2020. № 5 (33). С. 85–92. EDN: FTDDPQ

[3] Носков С. И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2023. № 1-2 (76). С. 218–220. https://doi.org/10.24412/2500-1000-2023-1-2-218-220; Носков С. И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 3. С. 467–469. https://doi.org/10.24412/2071-6168-2023-3-467-470

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\varepsilon_k^i\right| \to \min,\ i=\overline{1,6},$$

они сводятся к задачам линейно-булева программирования (ЛБП) (см., например, статью С. И. Носкова[1]). Так, задача ЛБП для простой вложенной кусочно-линейной регрессии первого типа формируется следующим образом.

Введем следующие обозначения:

$$h_k = \min_{i\in I}\{\alpha_i x_{ki}\},\ k=\overline{1,n},$$
$$g_k = \max_{i\in J}\{\beta_i x_{ki}\},\ k=\overline{1,n},$$
$$t_k = \min(h_k, g_k),\ k=\overline{1,n}.$$

Тогда задача оценивания параметров α_i, $i \in I$, β_i, $i \in J$ в модели (4) сводится к следующей задаче ЛБП:

$$h_k \le \alpha_i x_{ki},\ k=\overline{1,n},\ i\in I, \tag{8}$$
$$\alpha_i x_{ki} - h_k \le \left(1-s_{ki}\right)M,\ k=\overline{1,n},\ i\in I, \tag{9}$$
$$\sum_{i\in I} s_{ki} = 1,\ k=\overline{1,n}, \tag{10}$$
$$g_k \ge \beta_i x_{ki} k=\overline{1,n},\ i\in J, \tag{11}$$
$$\beta_i x_{ki} - g_k \ge \left(p_{ki}-1\right)M,\ k=\overline{1,n},\ i\in J, \tag{12}$$
$$\sum_{i\in J} p_{ki} = 1,\ k=\overline{1,n}, \tag{13}$$
$$t_k \le h_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{14}$$
$$t_k \le g_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{15}$$
$$h_k - t_k + Mr_k \le M,\ k=\overline{1,n}, \tag{16}$$
$$g_k - t_k - Mr_k \le 0,\ k=\overline{1,n}, \tag{17}$$
$$t_k + u_k - v_k = y_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{18}$$
$$u_k \ge 0,\ v_k \ge 0,\ h_k \ge 0,\ g_k \ge 0,\ t_k \ge 0,\ k=\overline{1,n}, \tag{19}$$
$$s_{ki} \in \{0,1\},\ k=\overline{1,n},\ i\in I, \tag{20}$$
$$p_{ki} \in \{0,1\},\ k=\overline{1,n},\ i\in J, \tag{21}$$
$$r_k \in \{0,1\},\ k=\overline{1,n}, \tag{22}$$

[1] Носков С. И. Идентификация параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2023. № 3 (67). С. 57–61.

$$\delta\left(\sum_{i\in I}\alpha_i-\sum_{i\in J}\beta_i\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(u_k+v_k\right)\to\min. \tag{23}$$

Здесь δ и M – наперед заданные соответственно малое и большое положительные числа.

Рассмотрим способ такого преобразования задачи ЛБП (8) – (23), который позволил бы одновременно оценивать параметры кусочно-линейных регрессий (2), (3) и (4), а также их всевозможных комбинаций. С этой целью введем следующие новые ограничения:

$$h_k+\eta_k-\mu_k=y_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{24}$$

$$g_k+\lambda_k-\theta_k=y_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{25}$$

$$\eta_k\ge 0,\ \ \mu_k\ge 0,\ \ \lambda_k\ge 0,\ \theta_k\ge 0,\ k=\overline{1,n}, \tag{26}$$

Преобразуем целевую функцию в задаче ЛБП (8) – (23) к виду:

$$\delta\left(\sum_{i\in I}\alpha_i-\sum_{i\in J}\beta_i\right)+\gamma_1\sum_{k=1}^{n}\left(u_k+v_k\right)+\gamma_2\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k+\mu_k\right)+\gamma_3\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k+\theta_k\right)\to\min. \tag{27}$$

Здесь $\gamma_i\in[0,1],\ i=\overline{1,3}$ – весовые коэффициенты.

Тогда при $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$, $\gamma_3=0$ решение задачи ЛБП (8) – (22), (24) – (26), (27) позволяет получить оценки параметров α_i, $i\in I$ функции Леонтьева (2), при $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=1$ – оценки параметров β_i, $i\in J$ функции риска (3), при $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=0$ – оценки параметров α_i, $i\in I$, β_i, $i\in J$ простой вложенной кусочно-линейной регрессии первого типа (4). Если же задать $\gamma_1\in(0,1)$, $\gamma_2\in(0,1)$, $\gamma_3\in(0,1)$, то решение этой задачи позволит построить простую вложенную кусочно-линейную регрессию первого типа (4) с компромиссными по отношению ко всем трем моделям (2) – (4) оценками параметров. При этом каждая из них будет иметь и самостоятельное значение.

Использованный прием может быть применен и по отношению к другим вложенным кусочно-линейным моделям (5) – (7) с целью вычисления компромиссных оценок параметров.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть при $m=3$, $n=10$ задана выборка данных:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Сформируем индексные множества: $I = \{1,2\}$, $J = \{2,3\}$.

Построим три указанные регрессионные модели.

1. Функция Леонтьева при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 0$:

$$y_k = \min\{0.857x_{k1},\ 2x_{k2}\} + \varepsilon_k^1,\ k = \overline{1,10}, \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(u_k + v_k) = 15.74, \quad \sum_{k=1}^{10}(\eta_k + \mu_k) = 13.85, \quad \sum_{k=1}^{10}(\lambda_k + \theta_k) = 17.35.$$

2. Функция риска при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$:

$$y_k = \max\{0.5x_{k2},\ 0.444x_{k3}\} + \varepsilon_k^2,\ \ k = \overline{1,10}, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(u_k + v_k) = 16, \ \sum_{k=1}^{10}(\eta_k + \mu_k) = 14, \ \sum_{k=1}^{10}(\lambda_k + \theta_k) = 16.55,$$

3. Простая вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$:

$$y_k = \min\{\min\{1.5x_{k1},\ 2x_{k2}\}, \max\{0.714x_{k2},\ 0.75x_{k3}\}\} + \varepsilon_k^3,\ \ k = \overline{1,10}, \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(u_k + v_k) = 12.46, \ \sum_{k=1}^{10}(\eta_k + \mu_k) = 24.5, \ \sum_{k=1}^{10}(\lambda_k + \theta_k) = 20.$$

4. Простая вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа с компромиссными оценками и равными весами, при $\gamma_1 = 0.33$, $\gamma_2 = 0.33$, $\gamma_3 = 0.33$:

$$y_k = \min\{\min\{1x_{k1},\ 2x_{k2}\},\ \max\{0.714x_{k2},\ 0.634x_{k3}\}\} + \varepsilon_k^3, k = \overline{1,10}, \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(u_k + v_k) = 13.54, \ \sum_{k=1}^{10}(\eta_k + \mu_k) = 14, \ \sum_{k=1}^{10}(\lambda_k + \theta_k) = 18.08.$$

Таким образом, ошибки аппроксимации моделей расположились в следующих диапазонах:

– [13.85, 24.5] для функции Леонтьева;

– [16.55, 20] для функции риска;

– [12.46, 16] для простой вложенной кусочно-линейной регрессии первого типа.

Диапазоны изменения оценок параметров составили:

$$\alpha_1 \in [0.857, 1.5];$$
$$\alpha_2 \in [2, 2];$$
$$\beta_2 \in [0.5, 0.714];$$
$$\beta_3 \in [0.444, 0.75].$$

Для практического применения могут быть использованы:

– функция Леонтьева (28) и

$$y_k = \min\{1x_{k1},\ 2x_{k2}\} + \varepsilon_k^1,\ \ k = \overline{1,10};$$

– функция риска (29) и

$$y_k = \max\{0.714x_{k2},\ 0.634x_{k3}\}\} + \varepsilon_k^2,\ \ k = \overline{1,10};$$

– простые вложенные кусочно-линейные регрессии первого типа (30) и (31).

Выводы

В работе рассмотрены известные кусочно-линейные регрессионные модели: функции Леонтьева и риска, вложенные регрессии. При выборе в качестве способа оценивания их параметров метода наименьших модулей задачи параметрической идентификации этих моделей сводятся к задачам линейно-булева программирования. Описан вычислительный прием, позволяющий путем расширения этих задач получать компромиссные оценки параметров. Этот прием состоит во введении новых ограничений в исходную задачу ЛБП и изменении ее целевой функции.

Список литературы / References

Носков С. И. Идентификация параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии. *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета*, 2023, № 3 (67), с. 57–61. https://doi.org/10.17084/20764359-2023-67-57; EDN: KPZIVR

Noskov S. I. Parameter identification of the simple form of a nested piecewise linear regression. *Scientific notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University*, 2023, no. 3 (67), pp. 57–61. (In Russ.) https://doi.org/10.17084/20764359-2023-67-57; EDN: KPZIVR

Носков С. И., Лоншаков Р. В. Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии. *Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем*, 2008, № 6, с. 63–64. EDN: WFBAMJ

Noskov S. I., Lonshakov R. V. Identification of piecewise linear regression parameters. *Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems*, 2008, no. 6, pp. 63–64. (In Russ.) EDN: WFBAMJ

Носков С. И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2023, № 3, с. 467–469. https://doi.org/10.24412/2071-6168-2023-3-467-470

Noskov S. I. Some forms of nested piece-linear regression. *Proceedings of Tula State University. Technical sciences*, 2023, no. 3, pp. 467–469. (In Russ.) https://doi.org/10.24412/2071-6168-2023-3-467-470

Носков С. И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии. *Международный журнал гуманитарных и естественных наук*, 2023, № 1-2 (76), с. 218–220. https://doi.org/10.24412/2500-1000-2023-1-2-218-220

Noskov S. I. An approach to formalizing nested piece-linear regression. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*, 2023, no. 1-2 (76), pp. 218–220. (In Russ.) https://doi.org/10.24412/2500-1000-2023-1-2-218-220

Носков С. И., Хоняков А. А. Применение функции риска для моделирования экономических систем. *Южно-Сибирский научный вестник*, 2020, № 5 (33), с. 85–92. EDN: FTDDPQ

Noskov S. I., Khoniakov A. A. Applying the risk function to model economic systems. *South Siberian Scientific Bulletin*, 2020, no. 5 (33), pp. 85–92. (In Russ.) EDN: FTDDPQ

Arefi M., Khammar A. H. Nonlinear prediction of fuzzy regression model based on quantile loss function. *Application of soft computing*, 2024, vol. 28, pp. 4861–4871. https://doi.org/10.1007/S00500-023-09190-w

Bansal A. K., Aggarwal P. Bayes Prediction for a Stratified Regression Superpopulation Model Using Balanced Loss Function. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2010, vol. 39, no. 15, pp. 2789–2799. https://doi.org/10.1080/03610920903128911

Byung R. C. Optimum Process Target for Two Quality Characteristics Using Regression Analysis. *Quality Engineering*, 2002, vol. 15, no. 1, pp. 37–47. https://doi.org/10.1081/QEN-120006709

Chen C., Yan C., Zhao N., Guo B., Liu G. A robust algorithm of support vector regression with a trimmed Huber loss function in the primal. *Soft Computing*, 2017, vol. 21, no. 18, pp. 5235–5243. https://doi.org/10.1007/s00500-016-2229-4

Dornaika F., Bekhouche S. E., Arganda-Carreras I. Robust regression with deep CNNs for facial age estimation: An empirical study. *Expert Systems with Applications*, 2020, vol. 141, pp. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.112942

Hu G., Peng P. All admissible linear estimators of a regression coefficient under a balanced loss function. *Journal of Multivariate Analysis*, 2011, vol. 102, no. 8, pp. 1217–1224. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.04.003

Wang K., Zhu W., Zhong P. Robust Support Vector Regression with Generalized Loss Function and Applications. *Neural Processing Letters*, 2015, vol. 41, no. 1, pp. 89–106. https://doi.org/10.1007/s11063-013-9336-3

Anand P., Kremchandani R., Chandra S. A class of new Support Vector Regression models. *Applied Soft Computing*, 2020, vol. 94. https://doi.org/10/1016/j.asoc.2020.106446

Park S. Y., Liu Y. Robust penalized logistic regression with truncated loss functions. *Canadian Journal of Statistics*, 2011, vol. 39, no. 2, pp. 300–323. https://doi.org/10.1002/cjs.10105

Yuan X., Zhang X., Guo W., Hu Q. An adapted loss function for composite quantile regression with censored data. *Computational Statistics*, 2024, vol. 39, no. 3, pp. 1371–1401. https://doi.org/10.1007/s00180-023-013526

Сведения об авторах

Сергей Иванович Носков – доктор технических наук, профессор; https://orcid.org/0000-0003-4097-2720, sergey.noskov.57@mail.ru, Иркутский государственный университет путей сообщения (д. 15, ул. Чернышевского, 664074 Иркутск, Россия); **Sergey I. Noskov –** Doctor of Technical Sciences, Professor, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720, sergey.noskov.57@mail.ru, Irkutsk State Transport University (15, ul. Chernyshevskogo, 664074 Irkutsk, Russia).

Александра Романовна Чекалова – магистрант; https://orcid.org/0009-0009-3811-9051, chekalova49@gmail.com, Иркутский государственный университет путей сообщения (д. 15, ул. Чернышевского, 664074 Иркутск, Россия); **Aleksandra R. Chekalova –** Student in the Master's Programme, https://orcid.org/0009-0009-3811-9051, chekalova49@gmail.com, Irkutsk State Transport University (15, ul. Chernyshevskogo, 664074 Irkutsk, Russia).

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 24.06.2024; одобрена после рецензирования 14.10.2024; принята к публикации 28.10.2024.

The article was submitted 24.06.2024; Approved after reviewing 14.10.2024; Accepted for publication 28.10.2024.