$$M_{opt} = f\left(A^2\omega^2\right), \text{ при } \omega \to \omega_{opt} .$$

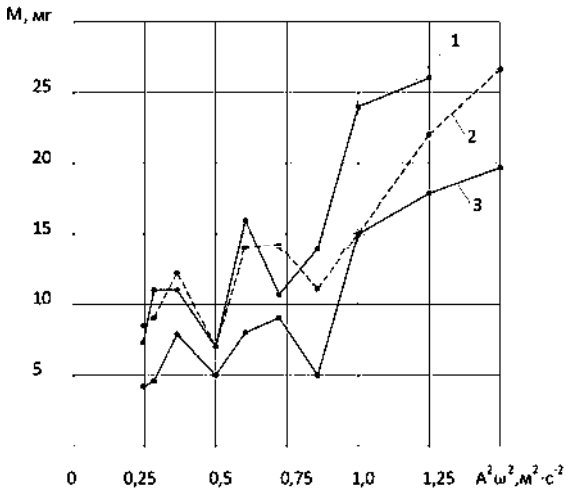


Рис. 2. Съем металла за 20 мин. обработки с образцов из стали 45 размерами 15×15×0,8 мм в зависимости от критерия $A^2\omega^2$ при различном соотношении объемов жидкой фазы $V_ж$ и гранулированных частиц $V_{абр}$:
1 – $V_{абр}$ = 2000 см^3, $V_ж$ = 500 см^3;
2 – $V_{абр}$ = 2000 см^3, $V_ж$ = 1500 см^3;
3 – $V_{абр}$ = 3000 см^3, $V_ж$ = 1500 см^3

Таким образом, интенсивность процесса обработки зависит от количества энергии, передаваемой от стенок контейнера частицам среды посредством образующейся продольной волны, которую можно оптимизировать за счет подбора частоты колебаний при фиксированных значениях амплитуд. Форма и объем контейнера, а также соотношение жидкой и гранулированной фаз играют достаточно высокую роль и влияют на значение постоянного коэффициента, определяющего тангенс угла наклона кривой. Использование современных частотных преобразователей переменного тока для трехфазных асинхронных двигателей (Преобразователь частоты Русэлком RVL) позволит провести настройку вибрационной установки в кратчайшее время и установить необходимый уровень частоты, после чего оптимальный режим может быть зафиксирован и отражен в технологическом процессе обработки деталей. Это позволит максимально сократить временные затраты при получении высоких качественных характеристик поверхности и поверхностного слоя детали.

Литература

1. *Кремер, Е.Б.* Одномерная динамическая континуальная модель сыпучей среды / Е.Б. Кремер, А.Я. Фиулин. // ДАН СССР. – 1989. – Т. 309. – № 4.

2. *Сергиев, А.П.* Особенности движения массы загрузки в различных зонах рабочего контейнера вибромашины / А.П. Сергиев, В.А. Анпилогов // Вестник машиностроения. – М., 1989. – № 3. – С. 83–100.

3. *Сергиев, А.П.* Особенности отделочно-зачистной обработки в свободных абразивных средах методом пространственных маятниковых колебаний / [А.П. Сергиев и др.] // Вестник машиностроения. – М., 2001. – № 1. – С. 51–52.

4. *Сергиев, А.П.* Поиск эффективных решений при обработке в центробежно-планетарных устройствах / [А.П. Сергиев и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – Орел, 2014. – № 2 (304). – С. 105–109.

УДК 519.63

Н.Н. Синицын, Н.В. Телин, И.О. Белодонова, К.А. Шушкова

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА В ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ ЗДАНИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ

Работа выполнена в рамках государственного научного гранта Вологодской области (договор № 27 от 25.08.2014)

В статье представлена математическая модель расчета нестационарного температурного поля двухслойной стенки при несимметричных граничных условиях третьего рода, изменяющейся во времени температуре окружающей среды. Представлены результаты расчета температурных полей при резком изменении граничных условий.

Нестационарное температурное поле, двухслойная стенка, тестирование алгоритма расчета.

The article presents a mathematical model of calculation of non-stationary temperature field of a double-layer wall with asymmetric boundary conditions of the third kind, time-varying ambient temperature. The authors presented the results of calculation of temperature fields when boundary conditions suddenly change.

Non-stationary temperature field, double-layered wall, testing the calculation algorithm.

Для большинства современных зданий (административных зданий, школ, жилых зданий, театров, кинотеатров, ряда производственных зданий и т.д.) допускается понижение температуры внутреннего воздуха ниже нормативного значения в течение части суток, в выходные и праздничные дни с целью

экономии энергии, затрачиваемой на их теплоснабжение. Такой режим отопления, когда температура внутреннего воздуха понижается на некоторый период времени ниже нормативного значения, называется «прерывистый». Необходимо установить такой оптимальный режим «прерывистого» отопления, при котором расход теплоты был бы минимальным. С этой целью необходимо рассмотреть период охлаждения как промежуток времени, в течение которого температура воздуха снижается до минимального допустимого значения. При проведении энергосберегающих мероприятий исследование изменения температуры внутреннего воздуха в зависимости от теплоинерционных показателей ограждающих конструкций и режимов подачи теплоты является актуальной задачей.

Для изучения закономерностей охлаждения плоской многослойной стенки применяют математические модели. Модель охлаждения многослойной стенки при граничных условиях третьего рода в несимметричном процессе включает уравнения теплопроводности [2], [3].

$$\frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial \tau} = a_1 \cdot \frac{\partial^2 T_1(x,\tau)}{\partial x^2},\ 0 \le \tau \le \tau_н;\ 0 \le x \le l_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \cdot \frac{\partial^2 T_2(x,\tau)}{\partial x^2},\ 0 \le \tau \le \tau_к;\ l_1 \le x \le l_2. \quad (2)$$

Начальное условие:

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_0 = \text{const}. \quad (3)$$

Граничные условия:

$$T_1(l_1,\tau) = T_2(l_1,\tau). \quad (4)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(l_1,\tau)}{\partial x} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2(l_2,\tau)}{\partial x}; \quad (5)$$

$$-\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(0,\tau)}{\partial x} + \alpha_1 \cdot \left[T_1(0,\tau) - T_{c1}\right] = 0; \quad (6)$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2(l,\tau)}{\partial x} + \alpha_2 \cdot \left[T_2(l,\tau) - T_{c2}\right] = 0, \quad (7)$$

где τ – время; $T_1(x,\tau), T_2(x,\tau)$ – текущая температура в слоях 1, 2; l_1, l_2 – толщина слоев 1, 2; x – текущая координата; T_{c1} и T_{c2} – текущие температуры окружающих стенку сред; $\tau_к$ – конечное время охлаждения; α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи.

Температура окружающей среды $T_c = f(\tau)$ (рис. 1); a_1, a_2 – коэффициенты температуропроводности материалов слоев 1, 2; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности слоев 1, 2; δ_1, δ_2 – толщина слоев 1, 2.

При разностном решении уравнений теплопроводности (1)–(6) входящие в них производные представляются производными в конечных разностях. При решении этих уравнений температуры определяют лишь в отдельных точках i = 1, 2, 3… n + 1, лежащих на оси x.

При этом предполагают, что в каждый момент времени τ распределение температур в промежутке между соседними точками является линейным. Узловые точки для уравнений (4) и (5) выбираются на границах слоев.

Правильный выбор Δx и $\Delta \tau$ при решении системы конечно-разностных уравнений имеет решающее значение.

При вычислении нестационарного температурного поля многослойной стенки разбиваем область определения на n узлов.

Тестирование программы расчета при следующих значениях: α_2 = 23Вт/м^{2}К; l_1 = 0,75 м; l_2 = 0,1 м; l = = 0,85 м; λ_2 = 0,051 Вт/мК; c_2 = 154 Дж/кгК; ρ_2 = = 1760 кг/м^3; λ_1 = 0,81 Вт/мК; c_1 = 880 Дж/кгК; ρ_1 = 1700 кг/м^3; T_0 = 30 ° С; T_c = 5° С.

В [1] представлено такое аналитическое решение задачи для случая постоянных температур окружающей среды и коэффициентов теплоотдачи с обеих сторон. Причем материал внутреннего слоя окружен слоями из одного и того же материала. Задача рассматривается при симметричных условиях.

Теплофизические свойства пластин отличны. Требуется найти температурное поле системы из двух соприкасающихся пластин (рис. 1).

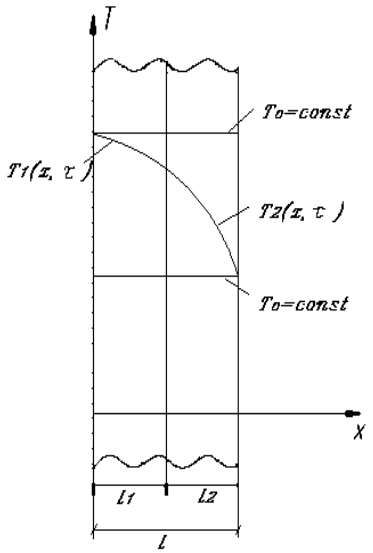


Рис. 1. Температурное поле системы двух соприкасающихся пластин

Если Bi $=\infty$, то граничное условие (7) примет вид:

$$T_2(l,\tau) = T_c = \text{const}.$$

Решение системы уравнений при симметричном условии $\frac{\partial T_1(0,\tau)}{\partial x}=0$ имеет вид:

$$\Theta_1=\frac{T_0-T(x,\tau)}{T_0-T_c}=$$

$$1-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2}{\mu_n\cdot\psi_n}\cdot cos(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot x/l_2)\cdot\exp(-\mu_n{}^2\cdot K_l^2\cdot K_a^{-1}\cdot Fo_1),$$

$$\Theta_2=\frac{T_0-T(x,\tau)}{T_0-T_c}=1-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2}{\mu_n\cdot\psi_n}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} cos(\mu_n\cdot\frac{x-l_1}{l_2})\cdot cos(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot K_l)- \\ -K_\varepsilon\cdot sin(\mu_n\cdot\frac{x-l_1}{l_2})\cdot sin(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot K_l)\end{array}\right]\times$$

$$\times\exp(-\mu_n{}^2\cdot K_l^2\cdot K_a^{-1}\cdot Fo_1),$$

где

$$\psi_n=(1+K_\varepsilon\cdot K_l\cdot K_a^{-1/2})\cdot sin(\mu_n)\cdot cos(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot K_l)+$$
$$+K_\varepsilon\cdot(1+K_\varepsilon^{-1}\cdot K_l\cdot K_a^{-1/2})\cdot cos(\mu_n)\cdot sin(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot K_l),$$

μ_n определяется из уравнения:

$$K_\varepsilon\cdot tg(\mu_n)\cdot tg(\mu_n\cdot K_a^{-1/2}\cdot K_l)=1. \qquad (8)$$

Здесь:

$$Bi=\frac{\alpha\cdot l}{\lambda};\ K_l=\frac{l_1}{l_2};\ Fo_1=\frac{a_1\cdot\tau}{l_1^2};$$
$$K_a=\frac{a_1}{a_2};\ K_\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\sqrt{\frac{\lambda_1\cdot c_1\cdot\rho_1}{\lambda_2\cdot c_2\cdot\rho_2}}.$$

Корни характеристического уравнения (8) имеют значения:

$$\mu_1=0{,}1438;\ \mu_2=0{,}7369;\ \mu_3=1{,}4244;$$
$$\mu_4=2{,}1167;\ \mu_5=2{,}7796;\ \mu_6=3{,}6004.$$

Для решения уравнения теплопроводности используется неявные конечно-разностные уравнения вида:

$$\frac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\Delta\tau}=a_1\cdot\left(\frac{T_{i+1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i-2}^{k+1}}{(\Delta x_1)^2}\right),\ 0<x<l_1;$$

$$\frac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\Delta\tau}=a_2\cdot\left(\frac{T_{i+1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i-2}^{k+1}}{(\Delta x_2)^2}\right),\ l_1<x<l;$$

Уравнения для граничных слоев имеют вид:

$$c_1\cdot\rho_1\cdot\frac{\Delta x_1}{2}\cdot\frac{T_1^{k+1}-T_1^k}{\Delta\tau}=\frac{\lambda_1}{\Delta x_1}\cdot(T_2^{k+1}-T_1^{k+1})$$

для узла 1;

$$c_2\cdot\rho_2\cdot\frac{\Delta x_2}{2}\cdot\frac{T_N^{k+1}-T_N^k}{\Delta\tau}=\alpha\cdot(T_c-T_N^{k+1})-\frac{\lambda_2}{\Delta x_2}\cdot(T_N^{k+1}-T_{N-2}^{k+1})$$

для узла N.

При $\mathrm{Bi}=\infty$ для узла N уравнение имеет вид: $T_N^{k+1}=T_c=\text{const}$.

В узле соприкосновения пластин уравнение имеет вид:

$$\lambda_1\cdot\frac{T_{N_1}^{k+1}-T_{N_1-1}^{k+1}}{\Delta x_1}=\lambda_2\cdot\frac{T_{N_1+1}^{k+1}-T_{N_1}^{k+1}}{\Delta x_2}.$$

Сравнение температурных полей точного аналитического решения и результатов моделирования позволяет определить независимые аргументы Δx_i и $\Delta\tau$. С увеличением количества узлов погрешность резко уменьшается.

Ниже приводится краткая информация, характеризующая влияние параметров конечно-разностной аппроксимации на точность расчета (табл. 1 и 2). Результаты численного решения, полученного на ПК по программе для двухслойной пластины при постоянных граничных условиях, сравниваются с существующим точным аналитическим решением [3]. При расчете было принято:

$$Bi=\infty;\ Fo_1=\frac{a_1\cdot\tau}{l_1^2}=0{,}05;\ l_1=0{,}75\text{ м};$$
$$l_2=0{,}1\text{ м};\ T_\text{ж}=5^\circ C;\ T_0=30^\circ C.$$

Температурное поле двухслойной пластины имеет сложный характер. В начальный период поверхность резко охлаждается, а затем темп охлаждения уменьшается. Анализ температурных полей показывает, что на распределение температуры в двухслойной стенке влияют параметры, которые можно обобщить с помощью критериев подобия $\mathrm{Bi}_1=\frac{\alpha_1\cdot l_1}{\lambda_1}$; $\mathrm{Bi}_2=\frac{\alpha_2\cdot l_2}{\lambda_2}$; $\mathrm{Fo}=\frac{a_1\cdot\tau}{l_1^2}$; $\Theta=\frac{t_n-t}{t_{ж1}-t_{ж2}}$ и комплексов $\mathrm{Bi}_1/\mathrm{Bi}_2$, $\mathrm{Bi}_1{}^2\cdot\mathrm{Fo}$ для изменения температуры на внешней поверхности. На рис. 2 показана взаимосвязь между этими обобщенными параметрами. Анализ характерных кривых позволил получить зависимость между параметрами в виде:

$$\Theta=f(\mathrm{Bi}_1{}^2\cdot\mathrm{Fo},\ \mathrm{Bi}_1/\mathrm{Bi}_2).$$

Здесь Bi_1 – число Био со стороны температуры $t_{ж1}$; Bi_2 – число Био со стороны температуры $t_{ж2}$.

Таблица 1

Влияние шага по координате ($\Delta\tau = 3$ с)

Число узлов			T_1		T_{N1}		ε_1	ε_2
N	N_1	N_2	Численное решение	Точное решение	Численное решение	Точное решение	Узел 1	Узел N_1
6	3	3	29,9300	29,9500	26,4700	27,5700	0,084	4,0
7	3	4	29,9200	29,9500	25,9700	27,5700	0,122	5,82
8	4	4	29,9900	29,9500	26,8400	27,5700	-0,103	2,64
9	5	4	30,0100	29,9500	27,2600	27,5700	-0,168	1,131
10	5	5	30,0090	29,9500	27,0600	27,5700	-0,165	1,86
10	6	4	30,0020	29,9500	27,4800	27,5700	-0,142	0,312
11	7	4	30,0016	29,9500	27,6300	27,5700	-0,139	-0,212
12	8	4	29,9900	29,9500	27,7200	27,5700	-0,115	-0,536
13	8	5	29,9900	29,9500	27,5400	27,5700	-0,112	0,114
14	9	5	29,9800	29,9500	27,6000	27,5700	$-7{,}99\cdot10^{-2}$	$-8{,}96\cdot10^{-2}$

Таблица 2

Влияние шага по времени (число узлов $N = 14$; $N_1 = 9$; $N_2 = 5$)

Шаг по времени, с	T_1		T_{N1}		ε_1	ε_2
	Численное решение	Точное решение	Численное решение	Точное решение		
2	29,998	29,950	27,630	27,570	-0,127	-0,2
3	29,980	29,950	27,600	27,570	$-7{,}99\cdot10^{-2}$	$-8{,}96\cdot10^{-2}$
4	30,000	29,950	27,650	27,570	-0,3	$-8{,}67\cdot10^{-2}$

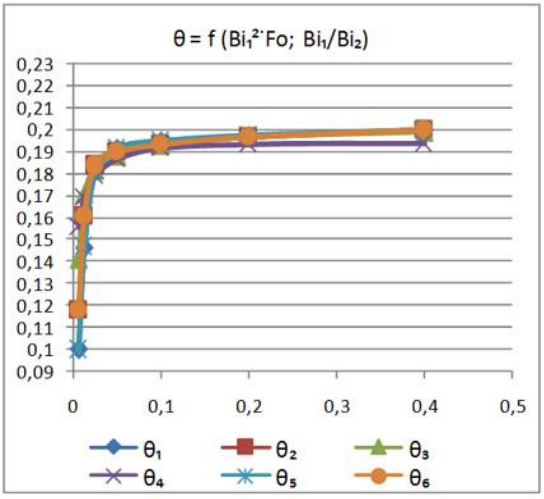


Рис. 2. Взаимосвязь относительно избыточной температуры на внешней поверхности стенки от критериев

Таким образом, предложенная математическая модель нестационарного температурного поля в плоской многослойной стенке при изменяющейся во времени температуре окружающей среды позволит исследовать закономерности охлаждения многослойной стенки.

Литература

1. *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М., 1967.

2. *Синицын, Н.Н.* Разработка модели неустановившегося процесса в плоской стенке при граничных условиях третьего рода / Н.Н. Синицын, И.О. Белодонова, К.А. Шушкова // Перспективное развитие науки, техники и технологий: Материалы II Межд. науч-практ. конф. (17 октября 2012 года): в 2 т. Т. 2 / отв. ред. А.Л. Горохов. – Курск, 2012. – С. 98–10.

3. *Синицын, Н.Н.* Температурное поле составных ограждающих конструкций зданий в период охлаждения / [Н.Н. Синицын и др.] // Перспективное развитие науки, техники и технологий: Материалы IV Межд. науч.-практ. конф. (17–18) октября 2014 г.) / отв. ред. А.Л. Горохов. – Курск, 2014. – С. 333–335.