

DOI 10.23859/1994-0637-2017-6-81-6
УДК 681.5

© Толпегин О.А., Литвинова П.Ю., 2017

Толпегин Олег Александрович

Доктор технических наук, профессор,
Балтийский государственный технический
университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова
(Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: bgtu_a5@mail.ru

Tolpegin Oleg Aleksandrovich

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Baltic State Technical University
"VOENMEKH" named after D.F. Ustinov
(St Petersburg, Russia)
E-mail: bgtu_a5@mail.ru

Литвинова Полина Юрьевна

Ассистент, Балтийский государственный
технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова
(Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: bgtu_a5@mail.ru

Litvinova Polina Jur'evna

Assistant, Baltic State Technical University
"VOENMEKH" named after D.F. Ustinov
(St Petersburg, Russia)
E-mail: bgtu_a5@mail.ru

**УПРАВЛЕНИЕ МАЛЫМ
КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ДВИГАТЕЛЯ-МАХОВИКА
НА ОСНОВЕ МЕТОДА
УПРАВЛЕНИЯ С ПОВОДЫРЕМ**

**A SMALL SPACECRAFT
CONTROL WITH THE USE
OF FLYWHEEL ON THE BASIS
OF THE CONTROL METHOD WITH
A GUIDE**

Аннотация. В статье рассматривается синтез системы стабилизации малого космического аппарата (МКА) с использованием двигателя-маховика при действии возмущений, статистические свойства которых неизвестны, но ограничены по абсолютной величине. Решение проводится с использованием математической модели системы стабилизации по углу тангажа. Управление выбирается с использованием эталонного движения – движения поводыря. Траектория движения поводыря выбирается с помощью метода фазовых плоскостей. Приведен алгоритм определения допустимого диапазона возмущений с заданными статистическими свойствами для решения исходной задачи с допустимой точностью, исходя из ограниченных возможностей системы управления движением объекта.

Abstract. The article deals with the synthesis of the stabilization system for a small spacecraft using a flywheel engine under the action of perturbations whose statistical properties are unknown but are limited in absolute magnitude. The solution is carried out using a mathematical model of the pitch angle stabilization system. Control is selected using the reference movement – the guide's movement. The path of the guide's movement is selected using the phase plane method. An algorithm is given to determine the permissible range of disturbances with given statistical properties for solving the initial problem with a permissible accuracy, taking into account limited capabilities of the object's motion control system.

Ключевые слова: малый космический аппарат, двигатель-маховик, дифференциальные игры, метод управления с поводырем, случайное возмущение

Keywords: small spacecraft, flywheel engine, differential games, control method with guide, random perturbation

Введение

Рассматривается управление малым космическим аппаратом с использованием двигателя-маховика при действии возмущений, статистические свойства которых

неизвестны, но ограничены по абсолютной величине. Задача рассматривается как дифференциальная игра двух игроков: в качестве одного игрока, стратегия которого неизвестна, выступает возмущающий момент, а в качестве другого игрока – космический аппарат, управление которого нужно выбрать. Особенность решения состоит в том, что множество управлений малого космического аппарата разбивается на два подмножества: одно подмножество управлений используется для компенсации возмущений, а второе – для решения исходной задачи при отсутствии возмущений. Полученная траектория называется траекторией поводыря. Разделить множество управлений на два удастся в редких случаях, поэтому в данной работе заранее выделяется подмножество управлений для решения исходной задачи при отсутствии возмущений, строится траектория поводыря, а затем в результате моделирования определяется допустимый диапазон возмущений с заданными статистическими свойствами, при которых возможно решение исходной задачи с допустимой точностью. Данный подход можно использовать как для линейных, так и нелинейных систем.

Основная часть

Рассмотрим систему стабилизации угла тангажа малого космического аппарата (МКА) с двигателем-маховиком. В полете на МКА действует возмущающий момент, статистические характеристики которого неизвестны, но известны пределы, в которых изменяется величина возмущающего момента.

Данную задачу будем рассматривать как дифференциальную игру двух игроков, так как в качестве одного игрока, стратегия которого неизвестна, выступает возмущающий момент, а в качестве другого игрока – космический аппарат, управление которого нужно выбрать.

Динамика МКА вокруг поперечной оси Oz при действии возмущений определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} d\omega_z/dt = 1/J_3 \cdot (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u + \xi); \\ d\vartheta/dt = \omega_z + v_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_3 = J_z - I$; $u = M_{\text{упр}Z} = dK/dt = I \cdot d\Omega_z/dt$; J_3 – момент инерции космического аппарата без учета момента инерции маховика; J_z – момент инерции космического аппарата по оси Oz ; I – момент инерции маховика; u – управляющий сигнал; $M_{\text{упр}Z}$ – управляющий момент двигателя-маховика по оси Oz , который появляется при разгоне маховика и приложен к корпусу летательного аппарата; K – кинетический момент двигателя-маховика; $d\Omega_z$ – проекция абсолютной угловой скорости маховика по оси Oz ; ω_z – угловая скорость космического аппарата по оси Oz ; ϑ – угол тангажа; v_0 – круговая скорость вращения космического аппарата; k_ω и k_u – передаточные числа системы управления; ξ – возмущающий момент [1].

Управляющий момент удовлетворяет ограничению:

$$|u| \leq \alpha. \quad (2)$$

Возмущающий момент ξ характеризует внешние неконтролируемые возмущения, действующие на космический аппарат и удовлетворяющие ограничению:

$$|\xi| \leq \beta = \rho \cdot \alpha, 0 < \rho < 1. \quad (3)$$

Задание ограничения на возмущения в виде (3) дает возможность оценить влияние возмущений на управление МКА.

Заданы граничные условия:

$$\begin{cases} \text{при } t = t_0 = 0, & \omega_z(0) = \omega_{z0} = -\nu_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0; \\ \text{при } t = T, & \omega_z(T) = \omega_{zT} = -\nu_0, \quad \vartheta(T) = \vartheta_3. \end{cases} \quad (4)$$

Требуется найти управление МКА, обеспечивающее минимум критерия

$$\mathfrak{J} = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min_u, \quad (5)$$

но при этом необходимо учитывать действие возмущений.

Момент окончания переходного процесса T не фиксирован.

Управление системой (1) при наличии возмущений будем рассматривать как антагонистическую дифференциальную игру двух игроков: первый игрок выбирает управление $u(t)$, а второй игрок – возмущение $\xi(t)$.

Первый игрок стремится минимизировать (5), а второй – максимизировать этот критерий.

Для решения задачи используем игровой метод управления с поводырем [2].

Множество управлений U МКА, заданного ограничением (2), разобьем на два подмножества: $U1$ и $U2$.

Подмножество $U1$ используем для решения сформулированной задачи при отсутствии возмущений. Эту траекторию назовем траекторией поводыря. Для подмножества $U1$ ограничение на управление МКА зададим в виде:

$$|u| \leq \alpha(1 - \rho), \quad (6)$$

где коэффициент ρ изменяется в диапазоне от 0 до 1.

Подмножество $U2$ используем для компенсации действия возмущений. Для подмножества $U2$ ограничение будем задавать в виде:

$$|u(t)| \leq \alpha \rho. \quad (7)$$

Если $\rho = 1$ (см. формулу (6)), то все ресурсы управления используются для компенсации возмущений и $U1 = 0$. При $\rho = 0$ подмножество $U2 = 0$.

Для исследования действия возмущений предлагается следующий алгоритм.

1. Зададим коэффициент ρ , который изменяется в диапазоне от 0 до 1, и для множества $U1$ ограничение на управление МКА зададим в виде (6).

2. При ограничении (6) для системы (1) решим задачу оптимального быстрогодействия при отсутствии возмущений и построим оптимальную траекторию. Эту траекторию назовем траекторией поводыря и запишем в память БЦВМ.

3. Решаем задачу о максимальном сближении траектории движения МКА с траекторией движения поводья при действии возмущений с ограничением (3) при заданном значении коэффициента ρ . При этом используем все возможности управления МКА, т.е. решаем задачу с ограничением (2).

Действие возмущений будем оценивать по отклонению реальной траектории движения МКА от траектории движения поводья.

Рассмотрим расчет траектории поводья при заданном значении коэффициента ρ . Для расчета траектории движения поводья при отсутствии возмущения систему уравнений (1) с учетом (6) запишем в виде:

$$\begin{cases} d\omega_z/dt = (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho)) \cdot J_3^{-1}; \\ d\vartheta/dt = \omega_z + v_0, \end{cases} \quad (8)$$

где коэффициент ρ влияет на возможности управления поводья.

Решим задачу оптимального быстродействия для системы (8) с критерием (5) при заданных начальных и граничных условиях (4). Для решения задачи используем принцип максимума Л.С. Понтрягина [3].

Составим функцию Гамильтона:

$$H = \Psi_1 \cdot (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho)) \cdot J_3^{-1} + \Psi_2 \cdot (\omega_z + v_0) - 1, \quad (9)$$

где переменные $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} d\Psi_1/dt = -\partial H/\partial \omega_z = \Psi_1 \cdot k_\omega/J_3 - \Psi_2; \\ d\Psi_2/dt = -\partial H/\partial \vartheta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10) имеет вид:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = C_1 \cdot e^{k_\omega/J_3 \cdot t} + C_2/k_\omega \cdot J_3; \\ \Psi_2(t) = C_2 = \text{const.} \end{cases} \quad (11)$$

Функция Гамильтона достигает максимума при управлении вида:

$$\tilde{u} = -\text{sign}(C_1 \cdot e^{k_\omega/J_3 \cdot t} + C_2/k_\omega \cdot J_3) \cdot \alpha \quad (12)$$

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ является кусочно-постоянным и меняет знак не более одного раза, так как функция $\Psi_1(t)$ имеет не более одного нуля [3].

Для задачи синтеза используем метод фазовых траекторий, при этом решение сводится к определению линии переключения, разделяющей фазовое пространство координат ω_z и ϑ на две области: в одной области оптимальное управление

$\tilde{u}(t) = +\alpha$, а в другой $\tilde{u}(t) = -\alpha$. При попадании фазовой траектории на линию переключения знак оптимального управления изменяется на противоположный.

Для построения линии переключения первое уравнение системы (8) поделим на второе уравнение этой системы:

$$d\omega_z / d\vartheta = \frac{(-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho))}{(J_3(\omega_z + \nu_0))}$$

и после разделения переменных

$$-\int_{\omega_{z0}}^{\omega_z} \frac{J_3 \cdot (\omega_z + \nu_0)}{k_\omega \cdot \omega_z + k_u \cdot u \cdot (1-\rho)} d\omega_z = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_T} d\vartheta;$$

проинтегрируем от ϑ_0 до ϑ_T правую часть и от ω_{z0} до ω_{zt} левую часть:

$$\begin{aligned} \vartheta_t^r = \vartheta_0 - \frac{J_3}{k_\omega} \cdot (\omega_{zt} - \omega_{z0}) + \frac{J_3 \cdot (k_u \cdot u \cdot (1-\rho) - k_\omega \cdot \nu_0)}{k_\omega^2} \times \\ \times \ln \left(\frac{(k_u \cdot u \cdot (1-\rho) + k_\omega \cdot \omega_{zt})}{(k_u \cdot u \cdot (1-\rho) + k_\omega \cdot \omega_{z0})} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где ϑ_0 и ω_{z0} – точка, в которую должна прийти система на фазовой плоскости, ϑ_t^r – абсцисса на фазовой плоскости, находящаяся на линии переключения, ω_{zt} – текущее значение угловой скорости.

Алгоритм выбора оптимального управления поводья имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \alpha, \text{ если } \begin{cases} \omega_z(t) \geq 0 \text{ и } \vartheta(t) \geq \vartheta_t^r; \\ \omega_z(t) < 0 \text{ и } \vartheta(t) > \vartheta_t^r; \end{cases} \\ \text{и } \tilde{u} = -\alpha, \text{ если } \begin{cases} \omega_z(t) > 0 \text{ и } \vartheta(t) < \vartheta_t^r; \\ \omega_z(t) \leq 0 \text{ и } \vartheta(t) \leq \vartheta_t^r. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Построение линии переключения определяет траекторию поводья.

При управлении с поводьрем управление МКА нужно выбирать с использованием алгоритма (14), так как в этом случае траектория МКА будет наискорейшим образом подходить к линии переключения, тогда после попадания на линию переключения, построенную для поводья, траектория МКА будет колебаться относительно этой линии и отклонение МКА в момент T от заданного значения будет не больше допустимой величины ε , обусловленной дискретностью выбора управления.

После расчета траектории поводья можно оценить величину возмущений, при которых возможно приведение МКА в заданную точку на фазовой плоскости за допустимое время при заданном значении коэффициента ρ . Для этого используем следующий алгоритм.

1. Задаем значение коэффициента ρ , с использованием рассмотренного выше алгоритма строим траекторию поводья и находим время переходного процесса $T_{\text{пов}}$.

2. Задаем возмущение ξ с заданными статистическими характеристиками и подтягиваем траекторию движения МКА при действии этого возмущения к траектории поводыря с использованием алгоритма (14), при этом используем полные возможности управления МКА, т.е. используем управление с ограничением (2).

3. Находим при $t = T_{\text{пов}}$ отклонение реальной траектории движения МКА от траектории движения поводыря, используя критерий:

$$J = \sqrt{(\omega_z(T_{\text{пов}}) - \omega_{3T})^2 + (\vartheta(T_{\text{пов}}) - \vartheta_3)^2}. \quad (15)$$

4. В результате многократного решения этой задачи находим математическое ожидание $\bar{J}$ критерия (15).

5. Если $\bar{J}$ меньше допустимой величины ε , то МКА устранил действия возмущений с данными статистическими характеристиками к моменту $T_{\text{пов}}$. В этом случае статистические характеристики возмущений увеличиваем на некоторую дискретную величину Δ и находим новое значение $\bar{J}$.

6. Если $\bar{J}$ больше допустимой величины ε , то МКА не сможет компенсировать возмущения с данными статистическими характеристиками к моменту $T_{\text{пов}}$ при данном ρ .

Изменяя значение ρ и вычисляя для каждого ρ максимально допустимые значения возмущений, найдем допустимый диапазон возмущений с заданными статистическими свойствами, при котором математическое ожидание $\bar{J}$ меньше допустимой величины.

Рассмотрим результаты моделирования с использованием данного алгоритма.

Исследование проводилось при следующих значениях параметров гипотетического МКА: $m_{\text{ка}} = 31,6$, кг – масса космического аппарата; $I_m = 0,195 \cdot 10^{-2}$, $I_z = 0,8953$ кг·м² – моменты инерции маховика и летательного аппарата с учетом момента инерции маховика по оси Oz ; $v_0 = 0,001$ рад/с, $k_\omega = 0,083$, $k_u = 1$.

Моделирование проводилось при различных ρ , и ограничениях

$$|u| \leq \alpha, \quad \alpha = M_{\text{упр_max}} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad |\xi| \leq \beta = k_u \cdot \rho \cdot \alpha.$$

Начальные условия имели следующие значения:

$$t_0 = 0, \quad \omega_z(0) = -0,075 \text{ рад/с}, \quad \vartheta(0) = 0,26 \text{ рад}.$$

Фазовые координаты точки, в которую должна прийти система:

$$\omega_z(T) = \omega_{3T} = -v_0 = -0,001 \text{ рад/с}, \quad \vartheta(T) = \vartheta_3 = 0,022 \text{ рад}.$$

Время движения поводыря определялось как первый момент времени, при котором значение критерия (15) становилось по абсолютной величине меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ рад/с.

Шаг численного интегрирования $h = 0,01$ с.

На рис. 1 представлены графики линий переключения для $\rho = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$.

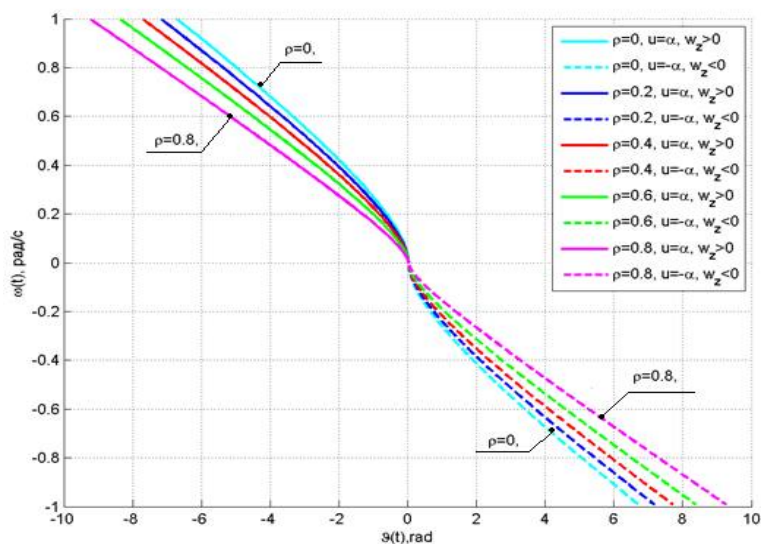


Рис. 1. Линии переключения при различных значениях ρ

На рис. 2, 3 представлены графики изменения $\omega_z(t)$ и $\theta(t)$, построенные при различных $\rho = 0,3; 0,5; 0,7$.

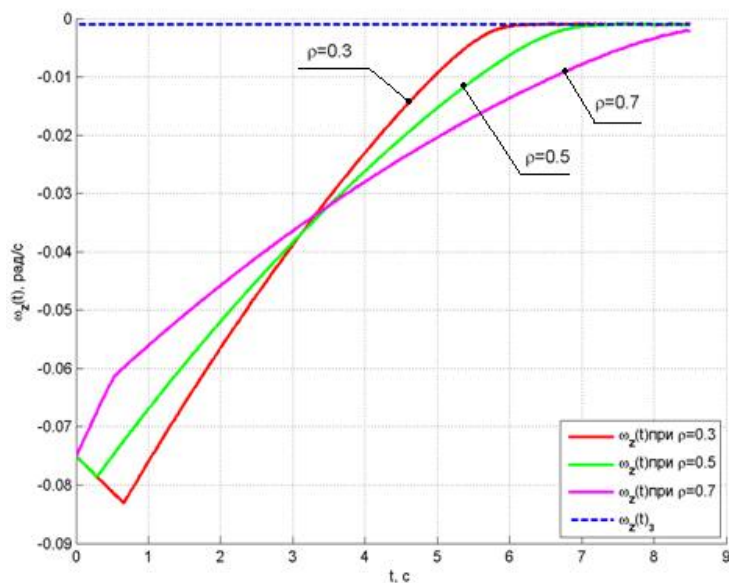


Рис. 2. График переходного процесса $\omega_z(t)$ при различных ρ

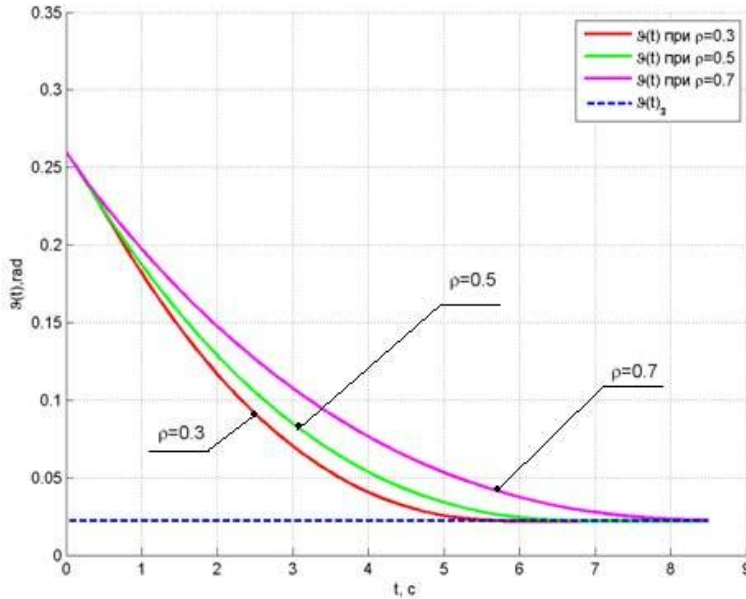


Рис. 3. График переходного процесса $\vartheta(t)$ при различных ρ

На основе рассмотренного выше алгоритма оценим величину возмущений, при которых возможно приведение МКА в заданную точку на фазовой плоскости за время движения поводяря при заданном значении коэффициента ρ . Возмущения задавались в виде случайных функций, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и заданным среднеквадратическим отклонением σ , причем величина ξ была ограничена $|\xi| \leq 0,006 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

В таблице представлены математические ожидания значения критерия оптимальности (15) при различных ρ и σ . При вычислении $\bar{J}$ проводилось по 20 испытаний. Допустимое значение $\varepsilon = 10^{-3}$.

Таблица

Математические ожидания $\bar{J}$ значения критерия оптимальности при различных значениях среднеквадратического отклонения σ и ρ

$\sigma(\text{Н/м})$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$\bar{J}(\rho = 0,2)$	0,00019	0,00021	0,00013	0,00033	0,00117	0,00142	0,00222	0,00351	0,00334
$\bar{J}(\rho = 0,4)$	0,00021	0,00019	0,00023	0,00024	0,00073	0,00102	0,00075	0,00149	0,00254
$\bar{J}(\rho = 0,6)$	0,00014	0,00018	0,00020	0,00025	0,00049	0,00114	0,00090	0,00156	0,00122
$\bar{J}(\rho = 0,8)$	0,00007	0,00013	0,00014	0,00038	0,00068	0,00090	0,00094	0,00123	0,00128

Из таблицы следует, что если допустимое значение $\bar{J} < \varepsilon$, то σ случайного возмущения при $\rho = 0,2$ не должна превышать 0,05 Н/м, при $\rho = 0,4$ и $\rho = 0,6$ – 0,06 Н/м, а при $\rho = 0,8$ – 0,08 Н/м.

Выводы

Результаты моделирования показывают работоспособность предлагаемого игрового алгоритма для оценки возможностей управления МКА с двигателем-маховиком при действии разного вида возмущений, ограниченных по абсолютной величине.

Литература

1. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 404 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

References

1. Alekseev K.B., Bebenin G.G. *Upravlenie kosmicheskim letatel'nyy apparatom* [Space flight control system]. Moscow: Mashinostroenie, 1964. 404 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnyye differencial'nyye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.
3. Pontriagin L.S., Boltjanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1969. 384 p.

Толпегин О.А., Литвинова П.Ю. Управление малым космическим аппаратом с использованием двигателя-маховика на основе метода управления с поводырем // Вестник Череповецкого государственного университета. 2017. №6 (81). С. 44–52.

For citation: Tolpegin O.A., Litvinova P.J. A small spacecraft control with the use of flywheel on the basis of the control method with a guide. *Bulletin of the Cherepovets State University*, 2017, no. 6 (81), pp. 44–52.