Вестник Череповецкого государственного университета, 2026, № 5 (134), с. 31–39.
Cherepovets State University Bulletin, 2026, no. 5 (134), pp. 31–39.

Научная статья
УДК 330.4
https://doi.org/10.23859/1994-0637-2026-5-134-3
https://elibrary.ru/wonpku

Некоторые особенности группировки наблюдений при построении кластерной линейной регрессии методами наименьших модулей и антиробастного оценивания параметров

Сергей Иванович Носков[1]✉, Александр Алексеевич Бутин[2], Илья Денисович Кириллов[3]
[1,2,3]Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия
[1]✉sergey.noskov.57@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720
[2]butin_aa@mail.ru, https://orcid.org/0009-0007-7464-8810
[3]iliakirillov07@gmail.com, https://orcid.org/0009-0004-1413-4656

Аннотация. В работе сделан краткий обзор публикаций по применению методов регрессионного анализа при исследовании сложных технических и экономических объектов с учетом возможности группировки наблюдений обрабатываемых выборок данных. В частности, выделены: новый метод обнаружения различных линейных структур в наборе данных, называемый алгоритмом линейной группировки; логарифмическая регрессионная модель для сгруппированных данных о выживаемости при наличии множества межфакторных связей; методы группировки водосборов с точки зрения их эффективности при прогнозировании удельного расхода воды с низким стоком; байесовские подходы к групповому отбору для моделей линейной регрессии; модель иерархической логистической регрессии для изучения данных с групповой структурой и бинарной переменной отклика. Авторами построены две версии кластерной линейной регрессии для объема выручки ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» с помощью методов наименьших модулей и антиробастного оценивания. Модели различаются даже по знакам оценок параметров (в том числе в частных регрессиях), при этом составы индексных множеств номеров наблюдений для этих регрессий в обоих вариантах совпадают. Это свидетельствует о том, что при использовании указанных методов для построения кластерных линейных регрессий эти составы могут как разниться, с учетом упомянутых в статье работ, так и совпадать, в зависимости от свойств каждой конкретной выборки данных.

Ключевые слова: модель, кластерная линейная регрессия, методы наименьших модулей и антиробастного оценивания, задача линейно-булева программирования, металлургический комбинат

Для цитирования: Носков С. И., Бутин А. А., Кириллов И. Д. Некоторые особенности группировки наблюдений при построении кластерной линейной регрессии методами наименьших модулей и антиробастного оценивания параметров**.** *Вестник Череповецкого государственного университета*, 2026, № 5 (134), с. 31–39. https://doi.org/10.23859/1994-0637-2026-5-134-3; EDN: WONPKU

© Носков С. И., Бутин А. А., Кириллов И. Д., 2026

Some features of grouping observations in the construction of clustered linear regression applying least modulus and anti-robust parameter estimation methods

Sergey I. Noskov[1]✉, Alexander A. Butin[2], Ilya D. Kirillov[3]
[1,2,3]Irkutsk State Transport University,
Irkutsk, Russia
[1]✉sergey.noskov.57@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720
[2]butin_aa@mail.ru, https://orcid.org/0009-0007-7464-8810
[3]iliakirillov07@gmail.com, https://orcid.org/0009-0004-1413-4656

Abstract. This paper provides a brief overview of the literature on the application of regression analysis methods to the study of complex technical and economic systems, taking into account the possibility of grouping observations within the data samples being analyzed. In particular, the following are highlighted: a new method for detecting various linear structures in a dataset, referred to as the linear grouping algorithm; a logarithmic regression model for grouped survival data in the presence of multiple inter-factor relationships; methods for grouping watersheds in terms of their effectiveness in forecasting specific water consumption under low flow conditions; Bayesian approaches to cluster sampling for linear regression models; a hierarchical logistic regression model for analyzing data with a clustered structure and a binary response variable. Two versions of clustered linear regression were constructed for the revenue of PJSC "Magnitogorsk Iron and Steel Works" using the least modulus and anti-robust estimation methods. The models differ significantly even in the signs of the parameter estimates, including the individual regressions. At the same time, the compositions of the index sets of observation numbers for these regressions coincide in both variants. This means that when applying the specified methods to construct clustered linear regressions, these compositions may either differ, taking into account the works mentioned in the article, or coincide, depending on the properties of each specific data sample.

Keywords: model, clustered linear regression, least modulus and anti-robust estimation methods, linear-Boolean programming problem, metallurgical plant

For citation: Noskov S. I., Butin A. A., Kirillov I. D. Some features of grouping observations in the construction of clustered linear regression applying least modulus and anti-robust parameter estimation methods. *Cherepovets State University Bulletin*, 2026, no. 5 (134), pp. 31–39. (In Russ.) https://doi.org/10.23859/1994-0637-2026-5-134-3; EDN: WONPKU

Введение

Применение методов регрессионного анализа при исследовании сложных технических и экономических объектов позволяет не только строить их адекватные модели, но и изучать характер изменения тенденций во взаимовлиянии задействованных факторов на предыстории путем группировки наблюдений обрабатываемых выборок данных. Так, в работе S. Aelst Van, X. Wang, R. H. Zamar, R. Zhu[1] предложен новый метод обнаружения различных линейных структур в наборе данных – алгоритм линейной группировки (далее – LGA). Он полезен для исследования потенциальных линейных закономерностей в наборах данных, то есть подмножеств, которые следу-

[1] Van Aelst S., Wang X., Zamar R. H., Zhu R. Linear grouping using orthogonal regression. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2006, vol. 50, no. 5, pp. 1287–1312.

ют различным линейным соотношениям. LGA сочетает в себе идеи основных компонентов, методов кластеризации и алгоритмов повторной выборки, а также может обнаруживать сразу несколько различных линейных зависимостей. В статье C. G. M. Groothuis-Oudshoorn, H. M. E. Miedema[1] представлен метод моделирования взаимосвязи полихотомических оценок состояния здоровья с такими предикторами, как характеристики местности, расстояние до источника загрязнения окружающей среды или воздействие загрязняющих веществ в окружающей среде. Модель сочетает в себе элементы групповой регрессии и многоуровневого анализа. В исследовании M. W. Fagerland, D. W. Hosmer[2] модели порядковой регрессии используются для описания взаимосвязи между упорядоченной категориальной переменной отклика и одной или несколькими независимыми переменными. Там же описан подход, который позволяет вычислять четыре критерия соответствия для оценки общей адекватности этих моделей. В работе E. M. Hashimoto, E. M. M. Ortega, G. M. Cordeiro, M. L. Barreto[3] логарифмическая регрессионная модель Burr XII для сгруппированных данных о выживаемости оценивается при наличии множества межфакторных связей. Методология моделирования для сгруппированных данных основана на таблицах продолжительности жизни, где периоды сгруппированы в k интервалов. В публикации G. Laaha, G. Blöschl[4] сравниваются четыре метода группировки водосборов с точки зрения их эффективности при прогнозировании удельного расхода воды с низким стоком: метод остаточной структуры; взвешенный кластерный анализ; регрессионные деревья; и подход, основанный на сезонности регионов.

В статье O. Paccagnella[5] отмечено, что при построении многоуровневой регрессии центрирование переменных модели приводит к эффектам, которые весьма неожиданны по сравнению с результатами традиционного регрессионного анализа. Автор рассматривает основные аргументы с точки зрения смысла, допущений и эффектов, лежащих в основе решения о разработке многоуровневой регрессии, подчеркивая преимущества и недостатки данного подхода. В исследовании W.-T. Lai, R.-B. Chen[6] рассматриваются байесовские подходы к групповому отбору для моделей линейной регрессии – байесовский индикаторный подход, а также байесовские групповые методы ЛАССО. Также упоминаются байесовские методы для разреженного группового отбора, которые можно рассматривать как расширение обычного

[1] Groothuis-Oudshoorn C. G. M., Miedema H. M. E. Multilevel grouped regression for analyzing self-reported health in relation to environmental factors: The model and its application. *Biometrical Journal*, 2006, vol. 48, no. 1, pp. 67–82.

[2] Fagerland M. W., Hosmer D. W. How to test for goodness of fit in ordinal logistic regression models. *The Stata Journal*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 668–686.

[3] Hashimoto E. M., Ortega E. M. M., Cordeiro G. M., Barreto M. L. The log-Burr XII regression model for grouped survival data. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 141–159.

[4] Laaha G., Blöschl G. A comparison of low flow regionalisation methods – catchment grouping. *Journal of Hydrology*, 2006, vol. 323, no. 1–4, pp. 193–214.

[5] Paccagnella O. Centering or not centering in multilevel models? The role of the group mean and the assessment of group effects. *Evaluation Review*, 2006, vol. 30, no. 1, pp. 66–85.

[6] Lai W.-T., Chen R.-B. A review of Bayesian group selection approaches for linear regression models. *WIREs Computational Statistics*, 2021, vol. 13, no. 4, e1513.

группового отбора. В статье C. R. Bilder, J. M. Tebbs[1] исследуются регрессионные модели группового тестирования как способ учета ковариат при оценке распространенности признаков, производится сравнение соответствий, полученных в ходе индивидуального и группового тестирования. Для оценки точности полученных оценок с использованием различных стратегий группировки используются показатели относительной погрешности и эффективности. В публикации Y. Choi, N.-W. Park, W. Lee[2] предлагается адаптивный к данным метод для сегментирования отдельных моделей логистической регрессии, основанных на наблюдениях с акцентом на бинарные данные об оползнях. Данный метод определяет модели регрессии, специфичные для наблюдений, и использует штраф в рамках сгруппированного ЛАССО для объединения моделей, адаптированных к данным, когда требуется вычислить общие коэффициенты регрессии.

Целью настоящей работы является соотнесение составов групп наблюдений, сформированных в результате построения кластерной линейной регрессии (далее – КЛР) методами наименьших модулей и антиробастного оценивания параметров.

Основная часть

Рассмотрим кластерную линейную регрессию[3]:

$$y_k = \alpha_0^j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^j x_{ki} + \varepsilon_k^j, j = \overline{1,r}, k \in P^j, \quad (1)$$

где y – зависимая, а x_i, $i = \overline{1,m}$ – независимые переменные (предикторы), r – заданное число кластеров, $\{1, 2, \ldots, n\} \supset P^j$ – множество номеров наблюдений в j-ом кластере. При этом будем считать выполненными условия:

$$\bigcup_{j=1}^{r} P^j = \{1,2,\ldots,n\},\ P^i \cap P^j = \varnothing,\ i \neq j.$$

[1] Bilder C. R., Tebbs J. M. Bias, efficiency, and agreement for group-testing regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 67–80.

[2] Choi Y., Park N.-W., Lee W. Data-driven segmentation of observation-level logistic regression models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistic*s, 2025, vol. 74, no. 4, pp. 1077–1099.

[3] Носков С. И., Беляев С. В. Оценка непротиворечивости кластерной линейной регрессионной модели. *Вестник Технологического университета*, 2025, т. 28, № 2, с. 88–91; Носков С. И., Беляев С. В. Антиробастное оценивание параметров кластерной линейной регрессии. *Ученые записки КнАГТУ*, 2025, № 3 (83), с. 41–45; Носков С. И., Беляев С. В., Чекалова А. Р. Построение кластерной линейной регрессионной модели потребления электроэнергии в Сибирском федеральном округе. *Вестник Череповецкого государственного университета*, 2026, № 1 (130), с. 26–35.

Задача состоит в вычислении оценок параметров α_i^j, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{1,r}$ и формирования индексных множеств P^j, $j=\overline{1,r}$. Она реализуется путем решения задачи оптимизации[1]:

$$G_\rho\left(A,\Xi\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sigma_{kj}\left|\varepsilon_k^j\right|^\rho\to min,\ \rho>1, \tag{2}$$

где

$$\sigma_{kj}=\begin{cases}1, & k\in P^j\\ 0, & k\notin P^j,\end{cases}$$

$$A=\left\|\alpha_i^j\right\|,\ j=\overline{1,r},\ i=\overline{0,m},\ \Xi=\left\|\sigma_{kj}\right\|,\ k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,r}.$$

При $\rho=1$ задача (2) соответствует методу наименьших модулей (далее – МНМ), относящегося к классу робастных, не реагирующих на выбросы в данных, а при $\rho\to\infty$ – методу антиробастного оценивания параметров (далее – МАО), который, напротив, сильно тяготеет к выбросам, смещая к ним гиперплоскость регрессии. В обоих случаях задача (2) сводится к задаче линейно-булева программирования (далее – ЛБП). Такая задача для МАО имеет вид[2]:

$$\alpha_0^j+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^j x_{ki}-M\sigma_{kj}+u_k\ge y_k-M,\ j=\overline{1,r},\ k=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\alpha_0^j+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^j x_{ki}+M\sigma_{kj}-u_k\le y_k+M,\ j=\overline{1,r},\ k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{r}\sigma_{kj}=1,\ k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$u_k\le z,\ k=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\sigma_{kj}\in\{0,1\},\ j=\overline{1,r},\ k=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$u_k\ge 0,\ k=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$z+\delta\sum_{i=1}^{n}u_k\to min, \tag{9}$$

где M – наперед заданное большое, а δ – малое положительные числа.

Для реализации МНМ целевую функцию (9) в задаче ЛБП (3)–(9) следует заменить на следующую:

[1] Носков С. И., Беляев С. В. Антиробастное оценивание параметров кластерной линейной регрессии. *Ученые записки КнАГТУ*, 2025, № 3 (83), с. 41–45.

[2] Носков С. И., Беляев С. В., Чекалова А. Р. Построение кластерной линейной регрессионной модели потребления электроэнергии в Сибирском федеральном округе. *Вестник Череповецкого государственного университета*, 2026, № 1 (130), с. 26–35.

$$\sum_{i=1}^{n} u_k \to min\,. \tag{10}$$

Естественным является вопрос – всегда ли меняется состав индексных множеств P^j, $j=\overline{1,r}$ и меняется ли он вообще при применении МНМ и МАО?

В работе «ММК. Годовая финансовая отчетность МСФО»[1] с помощью этих двух методов построена КЛР активной мощности гидроагрегата одной из гидроэлектростанций Сибири при $r=2$. В результате оказалось, что состав индексных множеств P^j, $j=\overline{1,r}$ оказался различным.

Построим с помощью МНМ и МАО кластерную линейную модель объема выручки ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» вида:

$$y_k=\alpha_0^j+\alpha_1^j x_{k1}+\alpha_2^j x_{k2}+\varepsilon_k^j,\ \ j=1,2,\ \ k\in P^j\,. \tag{11}$$

Введем обозначения y – объем выручки, млрд руб.; x_1 – объем продаж стали, млн т; x_2 – объем продаж труб, млн т.

В таблице приведена статистическая информация по выделенным показателям за 2015–2024 гг.[2]

Таблица

Статистическая информация

Год	y	x_1	x_2
2015	354,1	11,2	0,075
2016	380	11,6	0,082
2017	440,1	11,6	0,065
2018	511,5	11,7	0,073
2019	489,2	11,3	0,057
2020	460,2	10,8	0,083
2021	873,2	12,5	0,072
2022	699,8	10,7	0,095
2023	763,4	11,8	0,109
2024	768,5	10,6	0,111

Путем решения задачи ЛБП (3)–(5), (7), (8), (10) построим КЛР (11) с помощью МНМ. В результате получим:

[1] ММК. *Годовая финансовая отчетность МСФО*. URL: https://smartlab.ru/q/MAGN/f/y/ (дата обращения: 30.03.2026).

[2] ММК. *Годовая финансовая отчетность МСФО*. URL: https://smartlab.ru/q/MAGN/f/y/ (дата обращения: 30.03.2026).

$$y_k = 1650 - 88,5x_{k1} - 2817,81x_{k2} + \varepsilon_k, \quad k \in P^1, \tag{12}$$

$$P^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$y_k = 19 + 77x_{k1} - 1510.1x_{k2}, \quad k \in P^2, \tag{13}$$

$$P^2 = \{7, 8, 9, 10\}, \quad G_1 = 308,8, \quad G_\infty = 102,8, \quad E = 5,4\ \%.$$

Здесь G_1 – сумма модулей ошибок, G_∞ – максимальная по модулю ошибка, E – средняя процентная ошибка.

Теперь построим регрессию (11) с помощью МАО, решив задачу ЛБП (3)–(9):

$$y_k = 44,9x_{k1} - 1092,6x_{k2} + \varepsilon_k, \quad k \in P^1, \tag{14}$$

$$P^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$y_k = 426,7 + 47,6x_{k1} - 2066,4x_{k2}, \quad k \in P^2, \tag{15}$$

$$P^2 = \{7,8,9,10\}, \quad G_1 = 410,3, \quad G_\infty = 66,4, \quad E = 7,1\ \%.$$

По результатам сравнения КЛР (12), (13) и (14), (15) можно заключить следующее.

1. Они имеют сильно различающиеся, даже по знакам, оценки параметров (в том числе в частных регрессиях одной кластерной модели).

2. Значения критериев адекватности G_1, G_∞, E в обеих моделях следует признать вполне приемлемыми.

3. Составы индексных множеств P^1 и P^2 совпадают, что является важным результатом в контексте сформулированной цели данной работы. Это означает, что при использовании МНМ и МАО для построения КЛР данные составы могут как разниться, так и совпадать.

4. Множество P^1 соответствует временному периоду с 2015 по 2020 гг., а P^2 – с 2021 по 2024 гг.

Выводы

В работе сформулирована задача соотнесения составов групп наблюдений, сформированных в результате построения кластерной линейной регрессии методами наименьших модулей и антиробастного оценивания параметров. Реализация обоих методов сводится к решению задачи линейно-булева программирования. Два построенных варианта КЛР для объема выручки ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» имеют сильно различающиеся, даже по знакам, оценки параметров (в том числе в частных регрессиях одной кластерной модели). Вместе с тем, составы индексных множеств номеров наблюдений для частных регрессий в этих вариантах совпадают, что является важным результатом в контексте сформулированной цели данной работы. Это означает, что при использовании МНМ и МАО для

построения КЛР указанные составы могут как разниться, так и совпадать, в зависимости от свойств каждой конкретной выборки данных.

Список литературы / References

ММК. *Годовая финансовая отчетность МСФО*. URL: https://smartlab.ru/q/MAGN/f/y/ (дата обращения: 30.03.2026).

ММК. *Annual IFRS financial statements*. Available at: https://smartlab.ru/q/MAGN/f/y/ (accessed: 30.03.2026). (In Russ.)

Носков С. И., Беляев С. В. Антиробастное оценивание параметров кластерной линейной регрессии. *Учёные записки КнАГТУ*, 2025, № 3 (83), с. 41–45.

Noskov S. I., Belyaev S. V. Anti-robust estimation of cluster linear regression parameters. *KnASTU Scientific Notes*, 2025, no. 3 (83), pp. 41–45. (In Russ.)

Носков С. И., Беляев С. В. Оценка непротиворечивости кластерной линейной регрессионной модели. *Вестник Технологического университета*, 2025, т. 28, № 2, с. 88–91.

Noskov S. I., Belyaev S. V. Assessment of the consistency of a cluster linear regression model. *Herald of Technological University*, 2025, vol. 28, no. 2, pp. 88–91. (In Russ.)

Носков С. И., Беляев С. В., Чекалова А. Р. Построение кластерной линейной регрессионной модели потребления электроэнергии в Сибирском федеральном округе. *Вестник Череповецкого государственного университета*, 2026, № 1 (130), с. 26–35.

Noskov S. I., Belyaev S. V., Chekalova A. R. Construction of a cluster-based linear regression model for electricity consumption in the Siberian Federal District. *Cherepovets State University Bulletin*, 2026, no. 1 (130), pp. 26–35. (In Russ.)

Bilder C. R., Tebbs J. M. Bias, efficiency, and agreement for group-testing regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 67–80.

Choi Y., Park N.-W., Lee W. Data-driven segmentation of observation-level logistic regression models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistics*, 2025, vol. 74, no. 4, pp. 1077–1099.

Fagerland M. W., Hosmer D. W. How to test for goodness of fit in ordinal logistic regression models. *The Stata Journal*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 668–686.

Groothuis-Oudshoorn C. G. M., Miedema H. M. E. Multilevel grouped regression for analyzing self-reported health in relation to environmental factors: The model and its application. *Biometrical Journal*, 2006, vol. 48, no. 1, pp. 67–82.

Hashimoto E. M., Ortega E. M. M., Cordeiro G. M., Barreto M. L. The log-Burr XII regression model for grouped survival data. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 141–159.

Laaha G., Blöschl G. A comparison of low flow regionalisation methods – catchment grouping. *Journal of Hydrology*, 2006, vol. 323, no. 1–4, pp. 193–214.

Lai W.-T., Chen R.-B. A review of Bayesian group selection approaches for linear regression models. *WIREs Computational Statistics*, 2021, vol. 13, no. 4, e1513.

Paccagnella O. Centering or not centering in multilevel models? The role of the group mean and the assessment of group effects. *Evaluation Review*, 2006, vol. 30, no. 1, pp. 66–85.

Van Aelst S., Wang X., Zamar R. H., Zhu R. Linear grouping using orthogonal regression. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2006, vol. 50, no. 5, pp. 1287–1312.

Сведения об авторах

Сергей Иванович Носков – доктор технических наук, профессор, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720, sergey.noskov.57@mail.ru, Иркутский государственный университет путей сообщения (д. 15, ул. Чернышевского, 664074 Иркутск, Россия); **Sergey I. Noskov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, https://orcid.org/0000-0003-4097-2720, sergey.noskov.57@mail.ru, Irkutsk State Transport University (15, ul. Chernyshevskogo, 664074 Irkutsk, Russia).

Александр Алексеевич Бутин – кандидат физико-математических наук, доцент, https://orcid.org/0009-0007-7464-8810, butin_aa@mail.ru, Иркутский государственный университет путей сообщения (д. 15, ул. Чернышевского, 664074 Иркутск, Россия); **Alexander A. Butin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, https://orcid.org/0009-0007-7464-8810, butin_aa@mail.ru, Irkutsk State Transport University (15, ul. Chernyshevskogo, 664074 Irkutsk, Russia).

Илья Денисович Кириллов – заведующий лабораторией, https://orcid.org/0009-0004-1413-4656, iliakirillov07@gmail.com, Иркутский государственный университет путей сообщения (д. 15, ул. Чернышевского, 664074 Иркутск, Россия); **Ilya D. Kirillov** – Head of the Laboratory https://orcid.org/0009-0004-1413-4656, iliakirillov07@gmail.com, Irkutsk State Transport University (15, ul. Chernyshevskogo, 664074 Irkutsk, Russia).

Заявленный вклад авторов: авторы сделали разный вклад в подготовку публикации, что отражено в последовательности персоналий авторского коллектива. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors made different contributions to the preparation of the publication, which is reflected in the sequence of personalities of the author's team. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 13.04.2026; одобрена после рецензирования 25.05.2026; принята к публикации 18.06.2026.

The article was submitted 13.04.2026; Approved after reviewing 25.05.2026; Accepted for publication 18.06.2026.