

DOI 10.23859/1994-0637-2018-4-85-1

УДК 662.289:678.063

© Аваев А.А., Осипов Ю.Р., 2018

Аваев Александр Алексеевич

Кандидат технических наук, доцент,
Вологодский государственный университет
(Вологда, Россия)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

Avaev Alexandr Alexeevich

PhD in Technical Sciences,
Associate Professor, Vologda State University
(Vologda, Russia)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

Осипов Юрий Романович

Доктор технических наук, профессор,
Вологодский государственный университет
(Вологда, Россия)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

Osipov Yuriy Romanovich

Doctor of technical sciences, professor,
Vologda State University
(Vologda, Russia)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

**МОДИФИЦИРОВАННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ВУЛКАНИЗАЦИИ ЭЛАСТОМЕРА
В СИСТЕМЕ «ЭЛАСТОМЕР –
МЕТАЛЛ»****MODIFIED MATHEMATICAL
MODELS OF ELASTOMER
VULCANIZATION
IN THE ELASTOMER-METAL
SYSTEM**

Аннотация. Точное математическое описание процесса вулканизации эластомера является достаточно сложным. Причина тому – сложность физических и химических процессов, имеющих место при вулканизации эластомера. В общем случае процесс вулканизации состоит из нескольких фаз: прогрев эластомера; плавление серы, сопровождающееся поглощением тепла; реакция связывания свободной серы, которая сопровождается выделением тепла. Во всех этих фазах присутствует изменение тепловых свойств эластомера. Таким образом, описание процесса теплопереноса представляет собой явно нелинейную задачу. Задача осложнена еще и тем, что эластомер является покрытием металлической основы, чьи физические свойства сильно отличаются от свойств эластомера. В некоторых случаях возможны упрощения в описании подобных процессов. Основной задачей представленной работы является исследование таких модифицированных математических моделей.

Abstract. The correct mathematical description of elastomer vulcanization process is difficult enough. The reasons for such problems are complicated physical and chemical processes taking place in the elastomer vulcanization. In general, vulcanization process has several phases: elastomer warming up; sulphur melting with the heat absorption effect; the free sulfur binding reaction with heat release. In all these phases the change of the elastomer heat properties are taking place. As a result the description of heat transfer processes is the evident non-linear problem. The problem is more difficult because the elastomer is the coat of metal base which physical properties differ a lot from elastomer ones. In some situations the simplifications of such processes description are possible. The investigation of such modified mathematic models is the main task of represented work.

Ключевые слова: математическое описание, процесс вулканизации, эластомер, теплоперенос, нелинейная задача, металлическая основа, модифицированная математическая модель	Keywords: mathematic description, vulcanization process, elastomer, heat transfer, non-linear problem, metal base, modified mathematical model
--	---

Введение

Математическое моделирование сложных физико-химических процессов, к которым, вне всякого сомнения, относится и процесс вулканизации эластомерных покрытий на тканевых и металлических основах, имеет большое значение при изучении подобных процессов. Дело в том, что соответствующие экспериментальные методы исследований бывают весьма сложны и трудоемки, а в некоторых случаях и невозможны.

Математические модели можно условно разделить на численные и аналитические [2], причем обе группы таких моделей основываются на решении одних и тех же уравнений, но различными методами. Несмотря на внешнюю сложность аналитических методов, они обладают рядом несомненных преимуществ, важнейшим из которых является гарантированная стабильность сходимости решения, обеспечивающая его надежную достоверность.

Применение математических моделей в инженерной практике требует, по возможности, их относительной простоты при обязательной оценке погрешностей, допускаемых при подобных упрощениях. Аналитические методы моделирования как раз и позволяют проводить такие оценки с достаточно высокой степенью точности.

Основная часть

В представленной работе рассматривается процесс контактной термической вулканизации, когда на внешних поверхностях эластомерного покрытия и металлической основы поддерживается заданная температура. Весь процесс разбивается на несколько этапов, в течение каждого из которых изменение теплофизических свойств эластомера, а также мощности действующего источника тепла являются незначительными, следовательно, могут считаться постоянными. При этом распределение температуры на момент окончания очередного этапа является начальным условием при описании следующего этапа. Такой подход к моделированию процесса вулканизации позволяет использовать линейное уравнение теплопроводности, решая аналитически систему данных уравнений для эластомера и металла.

В качестве основы модели рассматривается бесконечная двухслойная пластина общей толщины $l_1 + l_2$, при этом диапазон изменения координаты x точек пластин описывается неравенством $-l_1 \leq x \leq l_2$; индекс $i = 1$ соответствует левой пластине (эластомер, интервал $[-l_1; 0]$), а индекс $i = 2$ – правой (металл, интервал $(0; l_2]$).

Линейные уравнения теплопроводности для левой и правой пластины имеют следующий вид

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2} + W_1; \quad (-l_1 < x \leq 0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (2)$$

$$(0 < x < l_2)$$

где τ – текущее время, с; $t_i(x, \tau)$ – температура в точке с координатой x , °C; W_1 – удельная мощность источника (стока) тепла в слое эластомера, °C/с; a_i – коэффициент температуропроводности, м²/с.

Для решения системы уравнений (1)–(2) использованы следующие краевые условия:

$$t_1(x, 0) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1; \quad (3)$$

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \text{const})$$

$$t_2(x, 0) = \gamma_2 = \text{const}; \quad (4)$$

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau); \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial x}; \quad (6)$$

$$t_1(-l_1, \tau) = t_2(l_2, \tau) = T = \text{const}, \quad (7)$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности, Вт/(м °C).

Краевые условия (3)–(7) содержат первый уровень упрощения постановки задачи. Дело в том, что, во-первых, чаще всего на практике поддерживаются одинаковые значения температуры на поверхностях $x = -l_1$ и $x = l_2$. В данном случае это температура $T = \text{const}$ (условие (7)). Во-вторых, при определенном соотношении размеров l_1 и l_2 металл, в силу высокого значения коэффициента теплопроводности, прогревается практически сразу [1] и относительно сложное начальное условие вида (3) может быть заменено на более простое – (4).

Решение системы уравнений (1)–(2) при краевых условиях (3)–(7) получено с помощью операционного исчисления и может быть представлено в виде

$$t_1(x, \tau) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 + \frac{L_1(x, \tau)}{K_1 K_2 + 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cos\left(\mu_m \frac{x}{l_1}\right) + B_m \sin\left(\mu_m \frac{x}{l_1}\right)}{C_m} e^{-\mu_m^2 F_0}; \quad (8)$$

$$t_2(x, \tau) = \gamma_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta_1 x + (2\alpha_1 \alpha_1 + W_1) \left(\frac{x^2}{2a_2} + \tau \right) + \frac{L_2(x, \tau)}{K_1 K_2 + 1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cos\left(K_2 \mu_m \frac{x}{l_2}\right) + K_1 B_m \sin\left(K_2 \mu_m \frac{x}{l_2}\right)}{C_m} e^{-\mu_m^2 F_0}, \quad (9)$$

где

$$K_1 = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{l_2}{l_1};$$

$$\begin{aligned} L_1(x) = & (T - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1) K_1 K_2 + t_1 - \beta_1 l_2 - \gamma_1 + \left[\alpha_1 l_1 - \left(1 + \frac{\lambda_1 l_2}{\lambda_2 l_1} \right) \beta_1 \right] x + \\ & + \left[(l_1^2 - x^2) K_1 K_2 - l_1 x - x^2 - 2(K_1 K_2 + 1) a_1 \tau \right] \alpha_1 + \\ & + \frac{W_1}{2a_1} \left[(l_1^2 - x^2) K_1 K_2 - l_1 x - x^2 \right] + (K_1 K_2 + 1) W_1 \tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x, \tau) = & (T - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1) K_1 K_2 + t_1 - \beta_1 l_2 - \gamma_1 + \left[\alpha_1 l_1 - \left(1 + \frac{\lambda_1 l_2}{\lambda_2 l_1} \right) \beta_1 \right] K_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} x + \\ & + \left[\left(l_1^2 - \frac{a_1}{a_2} x^2 \right) K_1 K_2 - K_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} l_1 x - \frac{a_1}{a_2} x^2 \right] \alpha_1 - (K_1 K_2 + 1) (2a_1 \alpha_1 + W_1) \tau + \\ & + \frac{1}{2} \left[K_1 K_2 \frac{l_1^2}{a_1} - (K_1 K_2 + 1) \frac{x^2}{a_2} - K_1 \frac{l_1 x}{\sqrt{a_1 a_2}} \right] W_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_m = & -\mu_m^2 \frac{a_1}{l_1^2} \left\{ \left[t_1 - \gamma_2 - \gamma_1 \cos(K_2 \mu_m) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta_1 l_2 \frac{\sin(K_2 \mu_m)}{K_2 \mu_m} \right] \frac{\sin \mu_m}{\sin(K_2 \mu_m)} - \right. \\ & \left. + K_1 (t_1 - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1) \right\} - (2a_1 \alpha_1 + W_1) \left[K_1 + \cos(K_2 \mu_m) \frac{\sin \mu_m}{\sin(K_2 \mu_m)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m = & -\mu_m^2 \frac{a_1}{l_1^2} \left\{ \left[t_1 - \gamma_2 - \gamma_1 \cos(K_2 \mu_m) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta_1 l_2 \frac{\sin(K_2 \mu_m)}{K_2 \mu_m} \right] \cos \mu_m - \right. \\ & \left. - (t_1 - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1) \cos(K_2 \mu_m) \right\} \frac{1}{\sin(K_2 \mu_m)} - \\ & - (2a_1 \alpha_1 + W_1) (\cos \mu_m - 1) \cos(K_2 \mu_m) \frac{1}{\sin(K_2 \mu_m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m = & \frac{1}{2} \mu_m^2 \frac{a_1}{l_1^2} \left[(K_1 + K_2) \mu_m \sin \mu_m + \right. \\ & \left. + \frac{K_2 \mu_m \sin \mu_m \cos(K_2 \mu_m) - \mu_m \cos \mu_m \sin(K_2 \mu_m)}{\sin^2(K_2 \mu_m)} \cos(K_2 \mu_m) \right]; \end{aligned}$$

$Fo = a_1 \tau / l_1^2$ – критерий Фурье; $\mu_m > 0$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) – корни характеристического уравнения

$$\sin \mu \cdot \cos(K_1 \mu) + K_1 \sin(K_1 \mu) \cdot \cos \mu = 0.$$

Следует отметить, что благодаря введенному упрощению решение системы уравнений (1)–(2) представлено не в виде изображения по Лапласу [1], а в формульном варианте.

На рис. 1 представлены результаты расчетов температурного поля, проведенные в соответствии с решением (8)–(9).

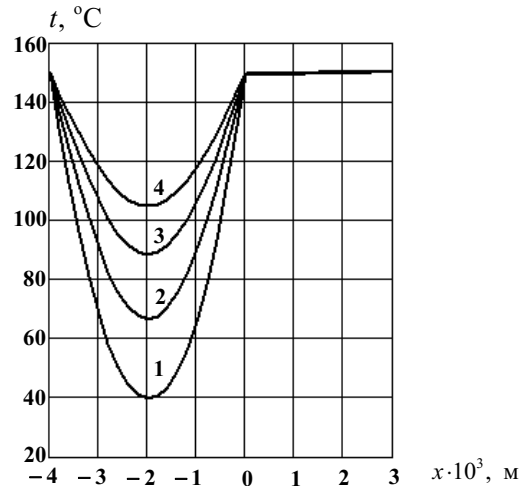


Рис. 1. Результаты расчета линий температурного поля эластомерного покрытия на стальной пластине в соответствии с решением (8)–(9).

Расчеты проведены применительно для слоя эластомера марки 2566 (НК+СКБ), нанесенного на пластину из стали Ст. 3. При этом толщина слоя эластомера составляла $l_1 = 0,004$ м, а стальной пластины – $l_2 = 0,003$ м. Температура внешних поверхностей пластин составляла 150 °C, а температура на момент начала прогрева системы с последующей вулканизацией слоя эластомера была 30 °C. Приведенным на рисунке линиям 1, 2, 3, 4 соответствовали значения времени $\tau = 5, 10, 15, 20$ с.

Результаты расчетов подтверждают справедливость введенного ранее допущения о равномерности прогрева стальной основы, так как температура на поверхности $x = 0$ практически совпадает с температурой поверхностей $x = -l_1$ и $x = l_2$. В связи с этим возможно введение второго уровня упрощения математической модели, состоящего в решении не системы уравнений (1)–(2), а только уравнения (1) при краевых условиях

$$t_1(x, 0) = f(x); \quad (10)$$

$$t_1(-l_1, \tau) = t_1(0, \tau) = T = \text{const}. \quad (11)$$

Решение уравнения (1) при краевых условиях (10)–(11) проведено с помощью конечных синус-преобразований Фурье и может быть представлено в виде

$$t_1(x, \tau) = T + \frac{2}{l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ p(m, \tau) - \frac{l_1 T}{m\pi} [1 - (-1)^m] \right\} \sin \left(\frac{m\pi(x + l_1)}{l_1} \right), \quad (12)$$

где

$$p(m, \tau) = \int_0^{\tau} \left\{ \frac{a_1 m\pi T}{l_1} [1 - (-1)^m] + \int_0^{l_1} W_1(x, \omega) \sin \left(\frac{m\pi x}{l_1} \right) dx \right\} e^{-a_1 \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 (\tau - \omega)} d\omega + \\ + \left[\int_0^{l_1} f(x) \sin \left(\frac{m\pi x}{l_1} \right) dx \right] e^{-a_1 \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 \tau};$$

ω – переменная интегрирования.

Решение (12) допускает работу с функцией общего вида $f(x)$ начального условия (10), а также с функцией $W_1(x, \tau)$ приведенной мощности источника тепла, зависящей в общем случае от координаты x и времени τ . Кроме того, решение (12) не предполагает работу с корнями μ_m характеристического уравнения, вместо них используются числа натурального ряда: $m = 1, 2, 3, \dots$

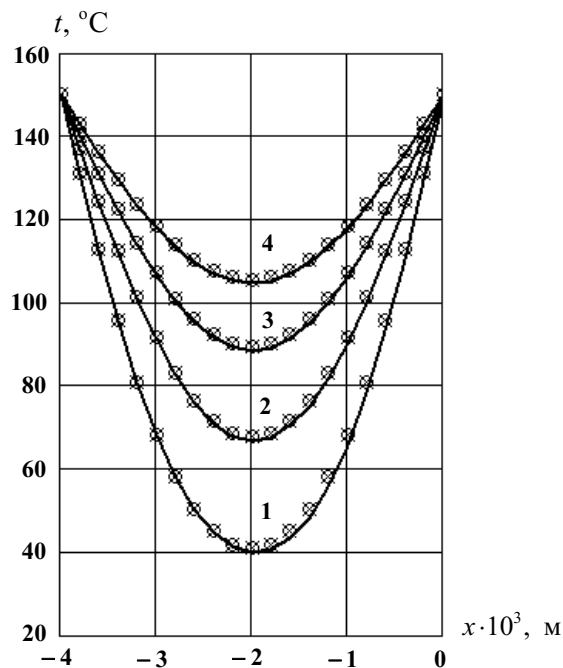


Рис. 2. Результаты расчета линий температурного поля эластомерного покрытия в соответствии с решениями (8)–(9) и (12)

На рис. 2 представлены результаты расчетов температурного поля эластомерного покрытия в соответствии с решениями (8)–(9) и (12). Сплошные линии соответствуют решению (8)–(9), а решению (12) – кружочки с вписанными в них крестиками. Обе серии расчетов проведены для одного и того же эластомера при тех же значениях времени (рис. 1, линии 1, 2, 3, 4).

Из рис. 2 следует, что расхождения в результатах расчетов сравнительно невелики – максимальное значение абсолютной погрешности при этом составляет не более 1–2 °С. Точность расчетов можно повысить, если заменить условие (11) на условия

$$t_1(-l_1, \tau) = T = \text{const}; \quad t_1(0, \tau) = \Lambda(\tau),$$

используя при этом функцию $\Lambda(\tau) = T - be^{-k\tau}$ ($b, k = \text{const}$).

В этом случае решение (12) будет иметь более общий вид

$$t_1(x, \tau) = \left(1 - \frac{x + l_1}{l_1}\right) T + \frac{x + l_1}{l_1} \Lambda(\tau) + \\ + \frac{2}{l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ p(m, \tau) - \frac{l}{m\pi} [T - (-1)^m \Lambda(\tau)] \right\} \sin \left(\frac{m\pi(x + l_1)}{l_1} \right),$$

где

$$p(m, \tau) = \int_0^{\tau} \left\{ \frac{a_1 m\pi}{l_1} [T - (-1)^m \Lambda(\omega)] + \int_0^{l_1} W_1(x, \omega) \sin \left(\frac{m\pi x}{l_1} \right) dx \right\} e^{-a_1 \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 (\tau - \omega)} d\omega + \\ + \left[\int_0^{l_1} f(x) \sin \left(\frac{m\pi x}{l_1} \right) dx \right] e^{-a_1 \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 \tau}.$$

С учетом введения таких краевых условий абсолютная погрешность вычислений может быть снижена на один-два порядка.

Выводы

Математическое моделирование физико-химических процессов крайне актуально при разработке и оптимизации технологических схем современного промышленного производства. При этом важную роль играет возможность оценки погрешностей, неизбежно присутствующих при использовании предлагаемых математических моделей.

Возможность введения упрощений при работе со сложными объектами моделирования заслуживает особого внимания в плане применения соответствующих расчетов в инженерной практике.

Литература

1. Аваев А.А., Осипов Ю.Р. Математическая модель теплопереноса в процессе термической вулканизации покрытия из эластомера на металлической пластине // Вестник Череповецкого государственного университета. 2018. №1 (82). С. 14–19.
2. Лукомская А.И., Баденков П.Ф., Кеperша Л.М. Тепловые основы вулканизации резиновых изделий. М., 1972.

References

1. Avaev A.A., Osipov Y.R. Matematicheskaya model teploperenosa v protsesse termicheskoi vulkanizatsii pokrytiia iz elastomera na metallicheskoj osnove [Mathematic model of the heat transfer during thermal vulcanization of elastomer coat on the metal plate]. *Bulletin of the Cherepovets State University*, 2018, no. 1 (82), pp. 14–19.
2. Lukomskaia A.I., Badenkov P.F., Kopersha L.M. *Teplovye osnovy vulkanizatsii rezinovykh izdelii* [Heat bases of the rubber articles vulcanization]. Moscow, 1972.

Для цитирования: Аваев А.А., Осипов Ю.Р. Модифицированные математические модели вулканизации эластомера в системе «эластомер – металл» // Вестник Череповецкого государственного университета. 2018. №4(85). С. 8–15. DOI: 10.23859/1994-0637-2018-4-85-1

For citation: Avaev A.A., Osipov Y.R. Modified mathematical models of elastomer vulcanization in the elastomer-metal system. *Bulletin of the Cherepovets State University*, 2018, no. 4 (85), pp. 8–15. DOI: 10.23859/1994-0637-2018-4-85-1