УДК 519.1

М.В. Коновалова
Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.В. Колбин

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрены некоторые вопросы применения метода возмущений к задаче стохастического линейного программирования (СЛП) со случайным параметром в векторе ограничений. Рассмотрены вопросы устойчивости базисных переменных для задачи СЛП в случае стохастической целевой функции.

СЛП, устойчивость базисных переменных задачи СЛП, метод возмущений.

Some questions of applying the perturbation method to the task of stochastic linear programming with random parameter in vector of restrictions are considered in the paper. The questions of stability of basic variables for SLP task in case of stochastic objective function are examined in the article.

Stochastic linear programming, stability of the basic variables of SLP task, perturbation method.

1. Метод возмущений решения задач СЛП

Задачи СЛП изначально являются трудноразрешимыми или неразрешимыми. С помощью метода возмущений можно разделить некоторый круг задач СЛП на основную, детерминированную составляющую и тонкую, стохастическую. Решение исходной задачи получают с помощью настройки решения детерминированной части, что позволяет уйти от необходимости решения сложной задачи с вероятностными величинами. Пусть имеется стохастическая задача линейного программирования:

$$\begin{array}{l}\max f(x,\omega)\\ g(x,\omega)\le 0.\end{array}$$

Рассмотрим подход, который был предложен в работе [1]. Идея заключается в выделении в сложной задаче основной составляющей и тонкой составляющей, которая рассматривается как малое возмущение основной системы. Исходная задача:

$$\begin{array}{l}\max f(x)\\ g(x)\le 0.\end{array} \qquad (1)$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ первоначальной задачи представляют в виде:

$$\begin{array}{l}\varepsilon f_1(x) = f(x) - f_0(x)\\ \varepsilon g_1(x) = g(x) - g_0(x).\end{array}$$

Часть с индексом 0 является основной составляющей, описывающей изучаемую систему, а часть с индексом 1 – тонкая, настраиваемая часть, описывающая некоторую возмущающую, зависящую от случайных величин компоненту. При решении задачи вводятся произвольным образом функции $f_0(x)$, $g_0(x)$ и ε (ε может быть константой, функцией, случайным вектором, случайной вектор – функцией). Для нахождения решения было предложено рассматривать не исходную задачу с функциями f и g, а систему:

$$\begin{array}{l}\max f_0(x)\\ g_0(x)\le 0\end{array} \qquad (2)$$

и семейство задач:

$$\begin{array}{l}\max\{\varepsilon f_1(x) + f_0(x)\}\\ \varepsilon g_1(x) + g_0(x)\le 0,\end{array} \qquad (3)$$

а для нахождения решения исходной задачи (1) решить более простую задачу (2) и затем внести в решение поправки. Задачу (2), следуя [1], будем называть порождающей, а задачу (3) – возмущенной задачей. Данный подход может иметь место для решения задач вида, рассматриваемого в статье. Хотя элемент случайности (стохастики) очень часто присутствует в прикладных задачах, тем не менее, та вероятностная часть, которая, например, описывает отклонение спроса от обычной линии или внезапную поломку, является как раз возмущающей частью. Возмущения предполагаются малыми, а величина ε характеризует уровень малости этих возмущений. Таким образом, предполагаем, что наряду со стабильно действующими факторами существуют возмущающие факторы, которые являются стохастическими.

2. Вывод соотношений

Рассмотрим задачу:

$$\begin{array}{l}\max c_0 x\\ Ax_0 \le b_0\end{array}$$

и возмущенную задачу:

$$\begin{array}{l}\max(c_0 + \varepsilon c_1)x\\ p\{A_0 x + \varepsilon A_1 x \le b_0 + \varepsilon b_1(\omega)\} \ge \alpha.\end{array} \qquad (4)$$

Для возможности решать задачу с помощью метода возмущений необходимо, чтобы исходная задача обладала некоторыми свойствами. Рассмотрим здесь те из них, которые интересны в случае стохастической задачи. Важно, чтобы функции, представ-

ляющие ограничения возмущенной и порождающей частей, были непрерывны. Рассмотрим *i*-ую строку ограничений задачи (4):

$$a_{i1}^0 x_1 + a_{i2}^0 x_2 + \ldots a_{im}^0 x_m + \varepsilon(a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{im}^1 x_m) \le$$
$$\le b_i^0 + \varepsilon b_i^1(\omega).$$

Допустим, что величина $b_i^1(\omega) \propto N(\overline{b_i^1}, \sigma_{b_i})$. Использование нормального закона распределения является целесообразным, так как случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону, часто встречаются в прикладных задачах. После проведения преобразований получим:

$$\frac{b_i^1(\omega) - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}} \propto N(0,1).$$

Введем обозначения:

$$I = \left(\frac{a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{im}^1 x_m - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}} \right) \le \frac{b_i^1(\omega) - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}},$$
$$z = \left(\frac{a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{im}^1 x_m - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}} \right).$$

Следовательно, для *i*-ой строки ограничений можно записать следующее выражение $(P(I) \ge \alpha_i)$:

$$P(I) = \varphi(z) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}} \right)^2 \right\} d\left(\frac{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - \overline{b_i^1}}{\sigma_{b_i}} \right),$$

здесь

$$\varphi(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp - \frac{Z^2}{2} dZ,$$

т.е. условие непрерывности выполняется. В том случае, если от случайного параметра зависит матрица $A(\omega)$, невозможно получить аналитическое выражение для ограничений, чтобы определить является ли функция непрерывной, т.е. до реализации случайной величины невозможно определить можно ли решать задачу данным методом, так как для *i*-ой строки получаем следующее выражение:

$$P\left\{ \begin{array}{l} a_{i1}^0 x_1 + a_{i2}^0 x_2 + \ldots + a_{im}^0 x_m + \varepsilon(a_{i1}^1(\omega) x_1 + \\ + a_{i2}^1(\omega) x_2 + \ldots + a_{im}^1(\omega) x_{m1}) \le b_i^0 + \varepsilon b_i^1(\omega) \end{array} \right\} \ge \alpha.$$

То есть, использовать данный метод представляется целесообразным в случае наличия случайных компонентов только в векторе ограничений задачи. Если у порождающей задачи более одного решения (что в общем характерно для рассматриваемых линейных задач), необходимо иметь возможность решить следующую вспомогательную систему [1] (для рассматриваемого случая ее можно записать в следующем виде):

$$F_1^* = \max \left\{ c^{1T} x - \Lambda^T A^1 x + \Lambda^T b^1(\omega) \middle| x \in \theta^* \right\}, \quad (5)$$

где θ^* – множество решений порождающей задачи, Λ^T – вектор Куна-Таккера. Если матрица A – стохастическая, решение вспомогательной системы невозможно. В том случае, когда матрица A является детерминированной, по-прежнему остается необходимым решать сложную стохастическую задачу на определенном множестве величин x, которые являются решениями порождающей системы. Чтобы избежать процедуры решения сложной стохастической задачи, можно оценить вероятность того, что максимизируемое значение (5) окажется больше некоторого β. То есть интересно, с какой возможной вероятностью будет выполняться данное выражение:

$$c^{1T} x - \Lambda^T A^1 x + \Lambda^T b^1(\omega) \ge \beta.$$

Для оценки выполним преобразования и, обозначив,

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T = \left[\Lambda \Lambda^T \right]^{-1} \Lambda,$$

получим

$$b^1(\omega) \ge \gamma\beta - \gamma c x + A_1 x.$$

Проведем оценку выражения $b_i^1(\omega) - \overline{b_i^1} \ge \gamma_i \beta - \gamma_i c x + a_i^1 x - \overline{b_i^1}$ с помощью неравенств Чебышева и обозначим $\gamma_i \beta - \gamma_i c x + a_i^1 x - \overline{b_i^1} = C_1$. Получим в случае, когда $b_i^1(\omega) \ge \overline{b_i^1}$:

$$P\left(b_i^1(\omega) - \overline{b_i^1} \right) \le \frac{\sigma_{b_i(\omega)}}{C_1^2}.$$

Таким образом, учитывая, что все значения кроме стохастической величины $b(\omega)$ известны, можно, подставляя различные значения β, вычислить с какой вероятностью максимизируемая величина окажется больше некоторого значения. Величину β можно увеличивать до тех пор, пока вероятность будет оставаться необходимо большой. Так можно максимизировать необходимую величину с некоторой наперед заданной вероятностью, избежав необходимости решения первоначальной сложной стохастической задачи.

3. Устойчивость базисных переменных в задаче СЛП

Пусть целевая функция стохастической задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(x,\omega) = c_1^0 x_1 + c_2^0 x_2 + \ldots + c_n^0 x_n + \\ + \varepsilon c_1^1(\omega) x_1 + \ldots + \varepsilon c_n^1(\omega) x_n. \quad (6)$$

Интересным является вопрос о постоянстве базисных переменных, которые образуют оптимальное базисное решение при различных реализациях случайной величины. Будем рассматривать устойчивость относительно базисных переменных, найденных для задачи, в которой случайные параметры целевой функции заменены их математическими ожиданиями

$$f(x,\overline{\omega}) = c_1^0 x_1 + c_2^0 x_2 + \ldots + c_n^0 x_n + \\ + \varepsilon \overline{c_1^1} x_1 + \ldots + \varepsilon \overline{c_n^1}(\omega) x_n \quad (7)$$

(здесь и далее предполагаем, что математические ожидания случайной величины, где это необходимо, существуют). Найдем, при каких условиях и с какой вероятностью можно обеспечить постоянство базисных переменных для произвольных случайных величин. При решении задачи симплекс-методом на каждом шаге определяется вводимая и выводимая из базисного решения переменная [3]. Индекс новой базисной переменной зависит от коэффициентов целевой функции, чтобы базисные переменные оставались одними и теми же при различных реализациях случайной величины, должны оставаться одними и теми же по индексу наименьшие коэффициенты в целевой функции. Рассмотрим *i*-шаг: допустим, что на *i*-ом шаге при решении задачи (7) наименьшим был *t*-ый столбец, следовательно, для решения (6) индекс ведущего столбца должен остаться таким же. Рассмотрим выражение, по которому формируются на *i*-ом шаге коэффициенты целевой функции:

$$\gamma_t = \frac{\gamma_t}{\gamma_k} - 1,$$

где t – индекс ведущего столбца. Примечание: на каждом шаге происходит переименование коэффициентов целевой функции. Пусть на $(i+1)$-ом шаге наименьшим коэффициентом при решении (7) был коэффициент $\hat{\gamma}_t$. Для задачи (6) индекс наименьшего коэффициента должен остаться тем же, т.е. должно выполняться:

$$\hat{\gamma}_t \le \hat{\gamma}_{t+j},$$

или

$$\frac{c_t^0 + \varepsilon c_t^1(\omega)}{c_k^0 + \varepsilon c_k^1(\omega)} < \frac{c_{t+j}^0 + \varepsilon c_{c+j}^1(\omega)}{c_k^0 + \varepsilon c_k^1(\omega)},$$

где j – любое целое число: $1 \le t + j \le n$. Знаменатель в обеих частях неравенства один и тот же, поэтому проанализируем числитель. Проведя преобразования и обозначив

$$C_1 = c_{t+j}^0 - c_t^0 + \varepsilon \left[\overline{c_{t+j}^1}(\omega) - \overline{c_t^1}(\omega) \right],$$

получим

$$\varepsilon \left[c_t^1(\omega) - \overline{c_t^1}(\omega) \right] < \varepsilon \left[c_{t+j}^1(\omega) - \overline{c_{t+j}^1}(\omega) \right] + C_1.$$

Правая часть выражения в случае $c_t^1(\omega) - \overline{c_t^1}(\omega) \ge 0$ будет меньше некоторого ς_1 с вероятностью:

$$P\left(\left| c_t^1(\omega) - \overline{c_t^1}(\omega) \right| < \varsigma_1 \right) \ge 1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_1^2}.$$

Таким образом, с вероятностью, большей $1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_1^2}$, будет выполняться следующее неравенство:

$$\varsigma_1 - \frac{C_1}{\varepsilon} < \left[c_{t+j}^1(\omega) - \overline{c_{t+j}^1}(\omega) \right].$$

С помощью неравенства Чебышева можно получить следующую оценку для случая, когда $c_{t+j}^1(\omega) - \overline{c_{t+j}^1}(\omega) < 0$:

$$P\left(\left| c_{t+j}^1(\omega) - \overline{c_{t+j}^1}(\omega) \right| < -\varsigma_2 \right) \ge 1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_2^2},$$

где $\varsigma_2 = \varsigma_1 - \frac{C_1}{\varepsilon}$. Таким образом, получили вероятностную оценку возможности выполнения необходимых неравенств: это вероятность большая $1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_1^2}$ и $1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_2^2}$. Учитывая, что таких неравенств будет $\le n$ (нестрогое неравенство, так как могут быть нули среди коэффициентов целевой функции), выбираем величины ς_{1H}, ς_{2H}, удовлетворяющие всем выражениям. Получим, что на $(i+1)$-ом шаге с вероятностью большей

$$P_H = \left(1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_{1H}} \right) \left(1 - \frac{D(\omega)}{\varsigma_{2H}} \right)$$

базисные переменные останутся такими же, как и при решении ЗЛП, в которой случайные величины были заменены их средними значениями. Таким образом, регулируя величины ς_{1H} и ς_{2H}, можно получить постоянство базисных переменных с определенной вероятностью.

Литература

1. *Первозванский, А.А.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация / В.Г. Первозванский, А.А. Гайцгори. – М., 1979.

2. *Севостьянов, Б.А.* Курс теории вероятности и математической статистики / Б.А. Севостьянов. – М.; Ижевск, 2004.

3. *Юдин, Д.Б.* Линейное программирование (теория, методы и приложения) / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М., 1969.

УДК 536.2

К.В. Кутовой, Ю.Р. Осипов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ТЕПЛО - И МАССООБМЕНА В ПРОЦЕССЕ КОМБИНИРОВАННОЙ СУШКИ

В статье приводится описание методики проведенного экспериментального исследования процесса сушки дисперсного материала комбинированным СВЧ-конвекционным методом. Также указаны основные экспериментальные зависимости конечного влагосодержания высушиваемого материала от расхода и температуры ожижающего агента и от плотности потока электромагнитной энергии.

Теплоомен, массообмен, сушка, дисперсный, СВЧ, псевдоожижение.

The article describes the methodology of experimental study of the drying process of dispersed material using the combined microwave-convection method. The main experimental dependence of the final moisture content of dried material from the flow and temperature of the fluidizing agent and the flux density of electromagnetic energy is specified in the paper.

Heat transfer, mass transfer, drying, dispersed, microwave, fluidization.

В химической промышленности сушка наряду с выпариванием и обжигом, как правило, определяет технико-экономические показатели всего производства в целом, что связано со значительными затратами тепловой энергии для проведения данных процессов. Для сушки дисперсных материалов успешно используются сушилки с псевдоожиженным слоем, неоспоримым преимуществом которых по сравнению с другими сушилками является развитая поверхность контакта между частицами и сушильным агентом и интенсивное испарение влаги из материала [5, с. 56]. Наблюдаемая при этом значительная неравномерность сушки обусловленная тем, что при интенсивном перемешивании в слое время пребывания отдельных частиц существенно отличается от его средней величины. Это может быть устранено путем применения тепловой энергии, выделяемой в высушиваемом материале при поглощении электромагнитных полей сверхвысокой частоты (СВЧ) [1, с. 103]. Создание и внедрение в промышленное производство аппаратов такой конструкции, позволяющих повысить эффективность процесса сушки и снизить удельные затраты тепловой энергии на единицу выпускаемой продукции, является актуальной задачей.

С этой целью была разработана конструкция комбинированного аппарата для сушки дисперсного материала [4, с. 244]. Опыты проводились на экспериментальной лабораторной установке с регулируемой мощностью от 0 до 50 кВт [4, с. 76]. Исследуемый материал: древесные опилки хвойных пород (сосна, ель) с размером основной фракции от 2 до 5 мм, что составляет около 63 % от общей массы производимых в деревоперерабатывающей промышленности древесных опилок. Эквивалентный диаметр равен 3,16 мм. Испытуемый образец представляет собой паковку исследуемого материала размерами 400 мм х 400 мм и толщиной от 10 до 50 мм. Начальная влажность испытуемого образца от 90 до 110 % – свежесрубленная древесина [2, с. 216]. Параметры ожижающего агента (воздуха): расход – от 0,1 до 0,5 $м^3/с$, температура – от 40 до 80 °С. Параметры электромагнитного поля: частота – 2,47 ГГц, средняя плотность потока – от 15 до 64 $кВт/м^2$.

В процессе сушки необходимо знать мощность СВЧ поля или напряженность. Мощность электромагнитного поля, генерируемая магнетроном, регулируется на пульте управления силой тока. Мощность СВЧ поля в зависимости от тока магнетрона определялась по разности температур воды на входе и выходе из оконечной нагрузки. Температура в образцах измерялась с помощью хромелькопелевых термопар и автоматических электронных потенциометров КСУ-2. Температура на поверхности образца измерялась с помощью инфракрасного пирометра. Для определения влажности образцов использовали лабораторные весы и электровлагометр.

В процессе сушки в волноводной камере образец помещался в центр волновода, где напряженность поля имеет максимум. Включалась подача нагретого воздуха и СВЧ энергии. Через каждые 3 мин отключали подачу СВЧ энергии и определяли температуру на поверхности, внутри образца и вес образца. Процесс сушки продолжался до достижения влажности 8 – 10 %. После термообработки образцы помещали в сушильный шкаф для достижения ими абсолютно сухого состояния. Через 30 с записывали разность температур в оконечной нагрузке для определения проходящей энергии.