

DOI 10.23859/1994-0637-2018-3-84-1
УДК 669-04

© Габелая Д.И., Кабаков З.К., Степанов А.Т., Плашенков В.В., 2018

Габелая Давид Ивлериевич

Кандидат технических наук, доцент,
Череповецкий государственный университет
(Череповец, Россия)
E-mail: davex16@gmail.com

Gabelaia David Ivlerievich

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,
Cherepovets State University
(Cherepovets, Russia)
E-mail: davex16@gmail.com

Кабаков Зотей Константинович

Доктор технических наук, профессор,
Череповецкий государственный университет
(Череповец, Россия)
E-mail: s.v.luk@yandex.ru

Kabakov Zotei Konstantinovich

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Cherepovets State University
(Cherepovets, Russia)
E-mail: s.v.luk@yandex.ru

Степанов Александр Тимофеевич

Кандидат технических наук, доцент,
Череповецкий государственный университет
(Череповец, Россия)
E-mail: steat@chsu.ru

Stepanov Alexander Timofeevich

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,
Cherepovets State University
(Cherepovets, Russia)
E-mail: steat@chsu.ru

Плашенков Валерий Владимирович

Доктор военных наук, профессор,
Череповецкий государственный университет
(Череповец, Россия)
E-mail: plashenkov@chsu.ru

Plashenkov Valeriy Vladimirovich

Doctor of Military Sciences, Professor,
Cherepovets State University
(Cherepovets, Russia)
E-mail: plashenkov@chsu.ru

**ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ
МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА
ФОРМИРОВАНИЯ СЛЯБА
НА МНЛЗ**

**TESTING THE NUMERICAL
SOLUTION OF THE TASK
OF METALS CRYSTALLIZATION
IN MODELING THE
PROCESS OF FORMATION
OF SLAB ON CCM**

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы тестирования численного решения задачи кристаллизации металла при моделировании затвердевания и охлаждения слэба в машинах непрерывного литья. Показана необходимость выполнения тестов при разработке моделей. Изложена последовательность выполнения тестирования. Приведен пример тестирования модели затвердевания и охлаждения, в ходе выполнения которого исследовано влияние параметров алгоритма решения: количества

Abstract. The issue of complex solution of the problems of metal crystallization in the modeling of slab solidification and cooling in continuous casting machines are considered in the article. The necessity of testing during the development of models is shown. The sequence of testing is stated. The example of testing the solidification and cooling model is provided, in the course of which the effect of the decision algorithms is investigated: the number of nodes in the calculation area, the values of the coefficients of

узлов в расчетной области, значения коэффициента устойчивости разностной схемы и фиктивного интервала кристаллизации на погрешность результатов моделирования. В итоге работы сформулированы рекомендации по выбору значений настроечных параметров численного алгоритма для достижения заданной точности.

the difference scheme and the fictitious interval of crystallization for the error of the simulation results. To conclude, recommendations on the choice of the values of the tuned parameters of the numerical algorithm to achieve the specified accuracy are stated.

Ключевые слова: математическая модель, тестирование, численное решение, затвердевание металла

Keywords: mathematical model, testing, numerical solution, solidification of metal

Введение

В основе математического описания процесса затвердевания и охлаждения сляба на МНЛЗ лежит уравнение теплопроводности в частных производных. Для его решения довольно часто применяется универсальный и простой численный метод конечных разностей. В этом методе непрерывное течение времени заменяют дискретным с шагом Δt , а непрерывную область решения уравнения теплопроводности заменяют множеством точек (узлов).

Введенная при этом дискретность является причиной погрешности конечно-разностного решения. Ошибки в алгоритме решения, программировании и выборе настроечных коэффициентов модели приводят к численному решению, не соответствующему физике процесса.

Тестирование выполняется путем сравнения результатов моделирования с точным решением задачи теплопроводности. Задачами тестирования являются [1], [3]:

- исследование погрешности решения;
- проверка сходимости конечно-разностного решения к точному;
- определение настроечных параметров алгоритма, в частности, при явной схеме аппроксимации уравнения теплопроводности количества узлов, при котором погрешность решения не превышает заданной.

Обычно тестирование алгоритмов решения задачи формирования сляба на МНЛЗ выполняют только для двух часто применяемых граничных условий, при которых происходят нагрев или охлаждение поверхности тела:

- конвекцией окружающей среды (граничное условие III рода);
- путем лучистого теплообмена (закон Стефана-Больцмана).

В настоящей работе в рамках развития методологии математического моделирования предложена методика тестирования по затвердеванию металла.

Основная часть

Выполним тестирование численного алгоритма решения в следующей последовательности [1]:

- выбор исходных данных для компьютерной модели,
- исследование влияния параметров алгоритма (количества узлов N в расчетной области, значения коэффициента устойчивости k , разностной схемы, значения фик-

тивного интервала кристаллизации ΔT в математической модели процесса затвердевания) на погрешность результатов моделирования;

- оценка погрешности численного решения;
- рекомендации по выбору оптимальных значений параметров, при которых погрешность численного решения не превышает заданного значения.

При разработке теста используем понятие «фиктивного интервала кристаллизации» ΔT , в котором происходит выделение удельной теплоты кристаллизации. С учетом этого температуры ликвидус и солидус определяем следующим образом:

$$T_{\text{л}} = T_{\text{кр}} + 0,5\Delta T; T_{\text{с}} = T_{\text{кр}} - 0,5\Delta T.$$

Исходные данные для тестирования задачи затвердевания сляба представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для тестирования модели затвердевания

Величина, размерность	Обозначение	Значение
Половина толщины сляба, м	S	0,1
Начальная температура, °C	T^0	1550
Температура кристаллизации, °C	$T_{\text{кр}}$	1500
Температура поверхности, °C	$T_{\text{п}}$	1000
Плотность стали, кг/м ³	ρ	7700
Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)	λ	29
Теплоемкость, Дж/(кг·К)	c	740
Удельная теплота кристаллизации, Дж/кг	L	275000
Конечное время процесса, с	$t_{\text{к}}$	600

Для определения точных значений толщины корки ξ^* воспользуемся точным решением задачи Стефана [4] в виде формулы «закона квадратного корня»:

$$\xi^* = k\sqrt{t},$$

где k – корень трансцендентного уравнения [2]:

$$\frac{\lambda_1 (T_{\text{кр}} - T_{\text{п}})}{\sqrt{a} \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)} e^{-\frac{k^2}{4a}} - \frac{\lambda_2 (T_0 - T_{\text{кр}})}{\sqrt{a} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)} e^{-\frac{k^2}{4a}} = \rho L k \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Решив данное уравнение с помощью пакета PTC MathCad® для исходных данных, приведенных в табл. 1, получили значение $k = 2,91 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^{1/2}$.

В ходе численного решения задачи кристаллизации с помощью модели затвердевания и охлаждения сляба [2] определяем значения толщины корки ξ с заданным

шагом по времени Δt , сравниваем их с результатами точного решения ξ^* и находим относительную погрешность расчета δ по формуле:

$$\delta = \frac{|\xi - \xi^*|}{\xi^*} \cdot 100 \% .$$

На рис. 1 показано сравнение результатов моделирования и точного решения при различном количестве узлов в расчетной области ($k_y = 5$; $\Delta T = 10$).

На рис. 1 (а) видно, что при $N = 100$ и 200 толщина корки практически совпадает с точным решением, чего нельзя сказать при $N = 50$.

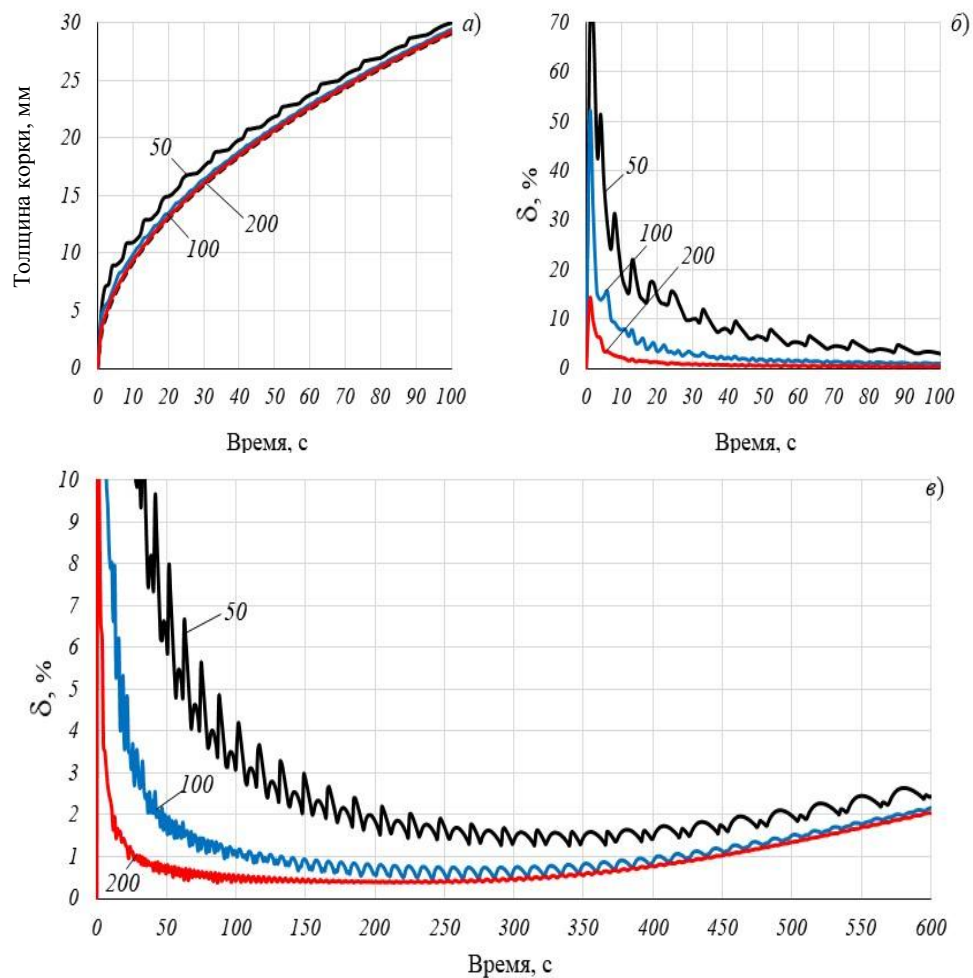


Рис. 1. Изменение толщины корки (а) по результатам моделирования (—) и точного решения (---) и относительной погрешности расчета (б-в) при различном количестве узлов в расчетной области N (цифры у кривых)

Как видно из рис. 1 (б), в первые моменты времени относительная погрешность расчета существенно превышает 1 %. Это объясняется высокой нестационарностью процесса, возникающей при резком снижении температуры поверхности от 1550 до 1000 °С на первом шаге по времени. Для уменьшения погрешности в первые моменты времени необходимо уменьшить расчетный шаг Δt , особенно при малом количестве узлов N .

Из рис. 1 (в) видно, что с уменьшением нестационарности процесса погрешность снижается, достигая 0,5 % при $N = 200$, а при $N = 50$ она так и не достигает требуемого уровня в 1 %. С некоторого момента времени (по истечении около 300 с) погрешность начинает возрастать. Объяснение этого факта можно получить, сравнив температуры на оси симметрии сляба, рассчитанные по численной модели и в результате точного решения по формуле [1] (см. рис. 2):

$$T_2(S, t) = T_0 - (T_0 - T_{кр}) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{S}{2\sqrt{at}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)}. \quad (1)$$

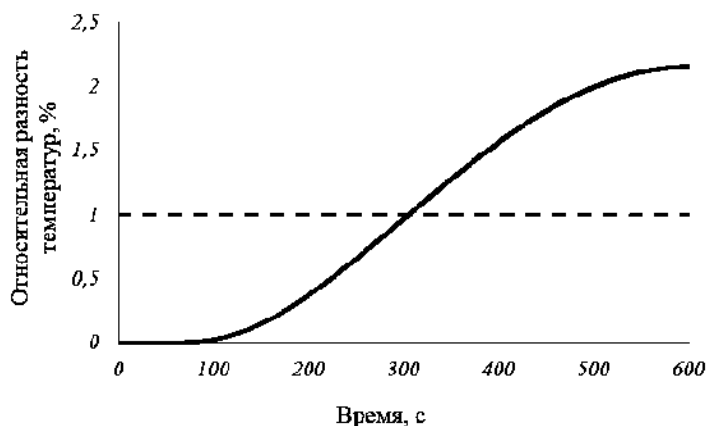


Рис. 2. Изменение относительной разности температур на оси симметрии сляба во времени, полученных по результатам численного решения при $N = 100$; $k_y = 5$; $\Delta T = 10$ и точного решения по формуле (1)

На рис. 2 видно, что отклонение поля температуры на оси симметрии сляба от точного решения возрастает с течением времени. С момента $t > 300$ с относительная разница становится выше уровня в 1 %. Именно с этого момента возрастает относительная погрешность прогноза величины корки (см. рис. 1 (в)). Отличие температурных полей начинается с жидкой фазы и связано с конечной толщиной сляба. Отсюда следует, что тестирование корректно только до $t < 300$ с или до толщины корки $\xi = 2,91 \cdot 10^{-3} \sqrt{300} = 0,05$ м, что при $S = 0,1$ м соответствует $0,5S$. Таким образом,

чтобы, не теряя точности, протестировать затвердевание половины толщины сляба S , необходимо в модели этот размер увеличить в 2 раза.

На конечном этапе расчета находим среднеквадратичную погрешность моделирования роста корки по формуле

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\bar{\xi}^*} \sqrt{\frac{1}{n_k} \sum_{n=1}^{n_k} (\xi - \xi^*)^2} \cdot 100 \%,$$

где $n_k = \left[\frac{t_k}{\Delta t} \right]$ – количество наблюдений; $\bar{\xi}^* = \frac{1}{n_k} \sum_{n=1}^{n_k} \xi^*$ – среднеарифметическое толщины корки по результатам точного решения.

На рис. 3 представлены результаты исследования влияния различных параметров расчета на среднеквадратичную погрешность.

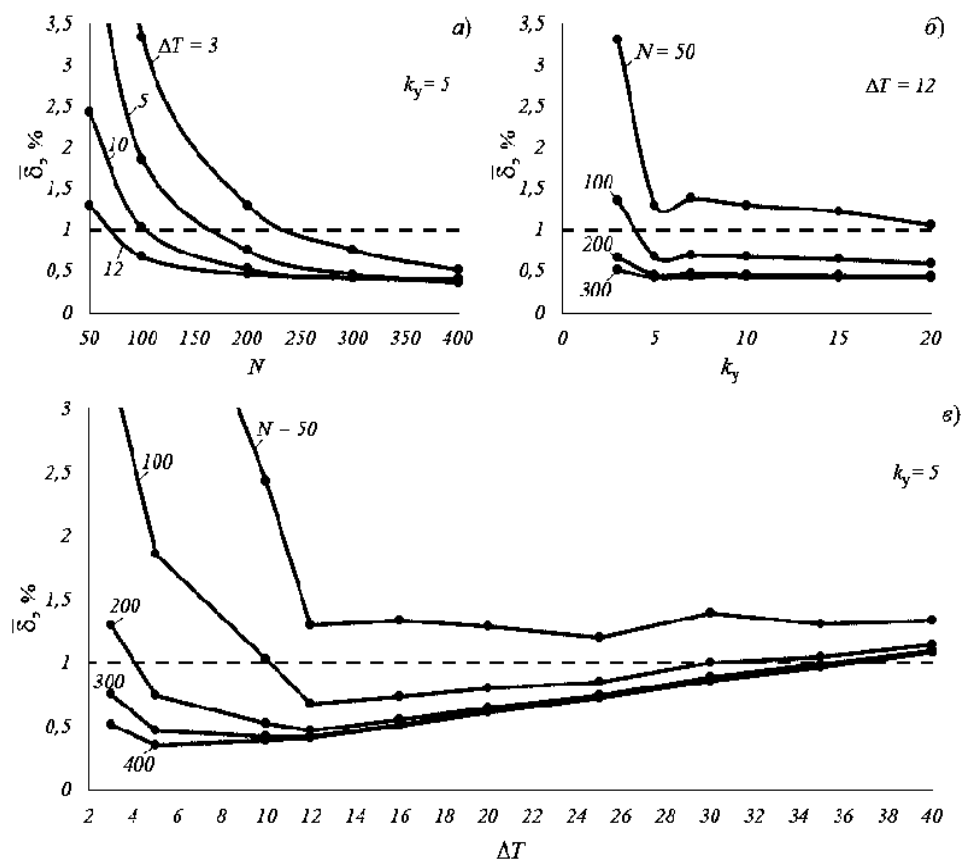


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности $\bar{\delta}$ от количества узлов N (а), коэффициента устойчивости k_y (б) и фиктивного интервала кристаллизации ΔT (в)

Погрешность решения уменьшается с увеличением количества узлов. Таким образом, численное решение сходится (приближается) к точному. Увеличение значения k_y рис. 3 (б) не дает такого эффекта повышения точности, который получается при измельчении сетки.

Зададим допустимую погрешность исследуемой величины, равной 1 % [1]. Из рис. 3 (а) следует, что для обеспечения заданного уровня погрешности необходимо взять не менее 225 узлов сетки при $\Delta T = 3$; 165 при $\Delta T = 5$; 100 при $\Delta T = 10$ и 70 при $\Delta T = 3$. При дальнейшем увеличении ΔT наблюдается возрастание ошибки. Так, из рис. 3 (в) видно, что для каждого количества узлов N имеется свое оптимальное значение ΔT , при котором результаты моделирования толщины корки имеют наименьшее значение среднеквадратичной погрешности. С увеличением N это влияние ослабевает.

Столь большое количество узлов сетки обусловлено «жестким» граничным условием I рода, которое заложено в точном решении. При использовании граничных условий III рода можно ожидать существенного уменьшения допустимого количества узлов.

Следует отметить, что выбор $N \gg N^*$ не рекомендуется, так как время расчета одного варианта при увеличении N в 2 раза возрастает, согласно условию устойчивости явной схемы, в 8 раз.

Если для вариантов моделирования при $N = 50, 100, 200$ и 300 погрешность не снижается до допустимого значения (1 %), необходимо выполнить моделирование, увеличивая количество узлов.

Если численное решение не сходится к точному, то следует устранить ошибки программирования формул и проверить правильность исходных данных и численного решения для первого и второго шагов по времени.

Таким образом, можно сформулировать следующие рекомендации по выбору значений настроечных параметров численного алгоритма:

1. Одновременное измельчение сетки и соответствующее уменьшение шага по времени, согласно условию устойчивости, влияет на уменьшение погрешности более эффективно, чем только уменьшение расчетного шага по времени при увеличении параметра k_y .

2. В результате тестирования установлено, что для уменьшения средней относительной погрешности до 1 % необходимо взять не менее 100 узлов сетки. Следует отметить, что для менее «жестких» граничных условий, например, III рода, это ограничение может измениться до существенно меньших значений N .

3. При тестировании численного решения задачи полного затвердевания сляба толщиной $2S$ при симметричном охлаждении ее размер следует взять равным $2S$, а сравнение проводить для толщины S .

4. Значение фиктивного интервала ΔT при численном решении задачи Стефана следует подбирать из условия минимума среднеквадратичной погрешности.

Выводы

В статье рассмотрены вопросы тестирования численного решения задачи кристаллизации металла при моделировании затвердевания и охлаждения сляба в машинах непрерывного литья. Изложена методика выполнения тестирования. Приве-

ден пример тестирования модели затвердевания и охлаждения, в ходе выполнения которого исследовано влияние параметров алгоритма решения: количества узлов в расчетной области, значения коэффициента устойчивости разностной схемы и фиктивного интервала кристаллизации на среднеквадратичную погрешность моделирования роста корки сляба. В итоге работы сформулированы рекомендации по выбору значений настроечных параметров численного алгоритма для достижения заданной точности.

Литература

1. Габелая Д.И., Кабаков З.К., Грибкова Ю.В. Математические модели и совершенствование технологии непрерывной разливки стали. Череповец: ЧГУ, 2016. 184 с.
2. Кабаков З.К., Габелая Д.И. Математическая модель затвердевания и охлаждения непрерывного слитка прямоугольного сечения // Повышение эффективности теплообменных процессов и систем: Материалы II Международной научно-технической конференции. Вологда: ВоГТУ, 2000. С. 131–133.
3. Кабаков З.К., Габелая Д.И., Мазина И.Ю., Пахолкова М.А. Тестирование компьютерных моделей процессов теплопроводности и затвердевания. Череповец: ЧГУ, 2013. 84 с.
4. Швыдкий В.С., Спирин Н.А., Ладыгичев М.Г., Ярошенко Ю.Г., Гордон Я.М. Элементы теории систем и численные методы моделирования процессов тепломассопереноса. М.: Интермет Инжиниринг, 1999. 520 с.

References

1. Gabelaia D.I., Kabakov Z.K., Gribkova Yu.V. *Matematicheskie modeli i sovershenstvovanie tekhnologii nepreryvnoi razlivki stali* [Mathematical Models and Improvement of Continuous Casting Technology]. Cherepovets: CHSU, 2016. 184 p.
2. Kabakov Z.K., Gabelaia D.I. *Matematicheskaya model' zatverdevaniia i ohlazhdeniia nepreryvnogo slitka priamougol'nogo secheniia* [Mathematical model of solidification and cooling of a continuous ingot of rectangular section]. *Povyshenie effektivnosti teploobmennyykh processov i sistem: Materialy II mezhdunarodnoi nauchno-tehnicheskoi konferencii* [Increase in the efficiency of heat exchange processes and systems: Materials of the II International Scientific and Technical Conference]. Vologda: VoGTU, 2000, pp. 131–133.
3. Kabakov Z.K., Gabelaia D.I., Mazina I.Yu., Paholkova M.A. *Testirovanie komp'yuternykh modelei processov teploprovodnosti i zatverdevaniia* [Testing of computer models of heat conduction and solidification processes]. Cherepovets: CHSU, 2013. 84 p.
4. Shvydkii V.S., Spirin N.A., Ladygichev M.G., Iaroshenko Yu.G., Gordon Ya.M. *Elementy teorii sistem i chislennyye metody modelirovaniia processov teplomassoperenosa* [Elements of the theory of systems and numerical methods for modeling heat and mass transfer processes]. Moscow: Internet Inzhiniring, 1999. 520 p.

Для цитирования: Габелая Д.И., Кабаков З.К., Степанов А.Т., Плашенков В.В. Тестирование численного решения задачи затвердевания металла при моделировании процесса формирования сляба на МНЛЗ // Вестник Череповецкого государственного университета. 2018. №3(84). С. 8–15. DOI: 10.23859/1994-0637-2018-3-84-1.

For citation: Gabelaia D.I., Kabakov Z.K., Stepanov A.T., Plashenkov V.V. Testing the numerical solution of the task of metals crystallization in modeling the process of formation of slab on CCM. *Bulletin of the Cherepovets State University*, 2018, no. 3 (84), pp. 8–15. DOI: 10.23859/1994-0637-2018-3-84-1.