

можно полагать постоянными, поэтому рассмотренная в данной работе инженерная методика расчета является достаточно точной.

Выводы

В статье разработана инженерная методика расчета оптимальной длительности нагрева и термостатирования слывов, разлитых на машинах непрерывного литья заготовок, при загрузке их в нагревательные печи в горячем состоянии. При реализации предлагаемого способа горячего посада может быть достигнута значительная экономия топлива в нагревательных печах прокатного производства, увеличение производительности печей и снижение угара металла в печах.

Литература

1. Лукин С.В., Шестаков Н.И., Антонова Ю.В. Совершенствование режимов затвердевания, охлаждения и нагрева стальных слитков при использовании моделирования // *Металлург*. 2014. № 9. С. 107–110.
2. Лукин С.В., Шестаков Н.И., Антонова Ю.В. Энергосбережение в нагревательных печах за счет оптимизации режимов разлива, охлаждения и нагрева стальных слитков // *Промышленная энергетика*. 2013. № 10. С. 26–30.
3. Казанцев Е.И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования. М., 1975.

4. Шукин А.А. Промышленные печи и газовое хозяйство заводов. М., 1973.

5. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. М., 1976. 351 с.

References

1. Lukin S.V., Shestakov N.I., Antonova Ju.V. Soвершенstvovanie rezhimov zatverdevaniia, ohlazhdeniia i nagreva stal'nyh slitkov pri ispol'zovanii modelirovaniia [Improving solidification modes, cooling and heating of steel ingots using simulation]. *Metallurg* [Metallurgist], 2014, № 9, pp. 107–110.
2. Lukin S.V., Shestakov N.I., Antonova Ju.V. Energosberezhenie v nagrevatel'nyh pechah za schet optimizacii rezhimov razlivki, ohlazhdeniia i nagreva stal'nyh slitkov [Energy saving in heating furnaces by optimizing the casting, cooling and heating of steel ingots]. *Promyshlennaiia energetika* [Industrial power], 2013, №10, pp. 26–30.
3. Kazancev E.I. *Promyshlennye pechi. Spravochnoe rukovodstvo dlia raschetov i proektirovaniia* [Industrial furnaces. Reference Manual for calculation and design]. Moscow, 1975.
4. Shhukin A.A. *Promyshlennye pechi i gazovoe hozjaistvo zavodov* [Industrial furnaces and gas supply plants]. Moscow, 1973.
5. Pehovich A.I., Zhidkih V.M. *Raschety teplovogo rezhima tverdyh tel* [Calculations of the thermal regime of solids]. Moscow, 1976. 351 p.

УДК 536.2

Н.Н. Монаркин, А.А. Силицын, А.Н. Наимов
Вологодский государственный университет

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ТЕПЛООБМЕННИКА

В работе построена и исследована простейшая математическая модель процесса аккумуляции и регенерации тепловой энергии в регенеративном теплообменнике. Математическая модель построена в виде линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для функции изменения температуры насадки во времени. В процессе исследования решения дифференциального уравнения доказано существование единственного периодического режима и приближения других режимов к периодическому при возрастании времени. На основе максимума и минимума периодического режима выведены формулы для нахождения коэффициентов энергоэффективности насадки. Приведено сравнение расчетных данных с экспериментальными.

Регенеративный теплообменник, процесс аккумуляции и регенерации тепла, температурный режим, коэффициенты энергоэффективности.

The simplest mathematical model of accumulation and regeneration of heat energy in a regenerative heat exchanger is constructed and investigated in this work. The mathematical model is constructed as a linear ordinary differential first-order equation. The mathematical model describes the function of change of filling temperature over time. For this mathematical model the existence of the only periodic regime and the approximation other regimes to the periodic with increasing time are proven. To find the energy efficiency coefficients of the filling are derived on the basis of the maximum and minimum of periodic regime. Comparison of calculated and experimental data is shown.

The regenerative heat exchanger, the process of accumulation and regeneration of heat, temperature regime, the energy efficiency coefficients.

Введение

В статье рассматривается вопрос о построении и исследовании простейшей математической модели процесса аккумуляции и регенерации тепловой энергии в регенеративном теплообменнике. Рассматриваемый теплообменник по конструкции относится к

типу стационарных переключающихся регенеративных теплоутилизаторов (СПРТ) [1]. В них теплообменным элементом является регенеративная насадка: насадка попеременно нагревается потоком горячего воздуха и охлаждается потоком холодного воздуха. На этапе нагрева происходит аккумуляция (накопле-

ние) тепла в насадке, а на этапе охлаждения – регенерация (отдача) тепла от насадки. Подобные теплообменники применяются в компактных вентиляционных устройствах с функцией энергосбережения [4], а также в средствах индивидуальной защиты органов дыхания при низких температурах [5].

Цель настоящей работы состоит в построении простейшей математической модели, позволяющей решать следующие задачи:

1) количественное и качественное исследование температурного режима (изменение температуры насадки во времени) в процессе аккумуляции и регенерации тепла;

2) определение коэффициентов энергоэффективности насадки, зависящих от свойств материала насадки и ее геометрической формы;

3) сопоставление выводимых формул с экспериментальными данными.

Построенную и исследованную модель мы называем простейшей, так как:

1) в отличие от имеющихся работ наша математическая модель представлена не дифференциальным уравнением в частных производных, а линейным обыкновенным дифференциальным уравнением;

2) рассматриваемое линейное обыкновенное дифференциальное уравнение явно решается и, вследствие этого, сформулированные задачи удастся решить сравнительно простыми математическими методами.

Под коэффициентами энергоэффективности понимается отношение полученной (отданной) насадкой тепловой энергии к общей тепловой энергии, проходящей через насадку за один этап аккумуляции (регенерации). Эти два коэффициента считаем постоянными на всех этапах аккумуляции и регенерации. При построении модели предполагается, что температура насадки зависит только от времени и начальной температуры насадки, т.е. не учитывается изменение температуры по длине насадки.

В диссертации [5] на основе уравнения теплопроводности в цилиндрической области разработана математическая модель теплорекуператора средства индивидуальной защиты органов дыхания для низких температур. По разработанной модели приводятся расчеты эффективности рекуператоров. Эффективность рекуператоров определяется как отношение двух разностей: первая – разность температур воздуха среды и вдыхаемого, вторая – разность температур воздуха среды и выдыхаемого. При построении математической модели процесс теплоотдачи описывается законом Ньютона-Рихмана, согласно которому количество отдаваемой или получаемой теплоты пропорционально разности температур.

В работе [2] разработана математическая модель взаимосвязанных нестационарных температурных полей конструктивных элементов регенеративного теплообменника и проходящего через него потока газозвдушной смеси. Разработанная модель позволяет исследовать влияние массы алюминиевой ленты, компактно уложенной в виде спирали в пластмассовом цилиндрическом кожухе, на режим работы

регенеративного теплообменника дыхательного аппарата.

Основная часть

Построение математической модели. Введем следующие обозначения: $U(t)$ – температура насадки в момент времени t ; t_0 – время одного этапа аккумуляции (регенерации) тепловой энергии; k_1, k_2 – коэффициенты энергоэффективности на этапе аккумуляции и регенерации тепловой энергии, соответственно; U_{in} – температура внутренней среды, откуда поступает поток горячего воздуха; U_{out} – температура внешней среды, откуда поступает поток холодного воздуха.

Согласно закону Ньютона-Рихмана [5], считаем, что на этапах аккумуляции и регенерации тепла скорость изменения температуры насадки прямо пропорциональна разности температур насадки и внешней среды:

$$U'(t) = \frac{k_1}{t_0} (U_{in} - U(t)),$$

$$t \in (2nt_0, 2nt_0 + t_0), n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$U'(t) = -\frac{k_2}{t_0} (U(t) - U_{out}),$$

$$t \in (2nt_0 + t_0, 2(n+1)t_0), n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Уравнением (1) описываем закон изменения температуры на этапах аккумуляции, а уравнением (2) – на этапах регенерации. Коэффициенты пропорциональности $\frac{k_1}{t_0}$ и $\frac{k_2}{t_0}$ характеризуют интенсивность теплообмена на этапах аккумуляции и регенерации соответственно. Предполагаем, что k_1 и k_2 отражают энергоэффективность насадки; их мы считаем безразмерными величинами, не зависящими от времени.

Для адекватности математической модели к уравнениям (1) и (2) добавляем начальное условие

$$U(0) = U_0, \quad (3)$$

где U_0 – задаваемая температура насадки в начальный момент времени, $U_{in} \leq U_0 \leq U_{out}$ и условия согласованности уравнений (1) и (2)

$$U(mt_0 - 0) = U(mt_0 + 0), m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

означающие сохранение (непрерывность) температуры $U(t)$ в моментах переключения mt_0 , $m = 1, 2, \dots$. Уравнения (1) и (2) вместе с условиями (3) и (4) составляют математическую модель процесса изменения температуры во времени в регенеративном теплообменнике. Из построенной модели видно, что изменение температуры $U(t)$ зависит от начальной температуры U_0 , температур внешней и внутренней среды – U_{out} и U_{in} , времени одного эта-

па t_0 и коэффициентов k_1 и k_2 . Всякую функцию $U(t)$, которая при заданных числах t_0 , k_1 , k_2 , U_{in} , U_{out} , U_0 удовлетворяет уравнениям (1), (2) и условиям (3), (4), назовем температурным режимом насадки. Температурный режим $U(t)$ назовем периодическим, если при любом $t \geq 0$ выполняется равенство $U(t+2t_0)=U(t)$, т.е. через время (период) $2t_0$ значение $U(t)$ повторяется. Исследуем построенную математическую модель, чтобы выявить характер зависимости $U(t)$ от времени t и параметров t_0 , k_1 , k_2 , U_{in} , U_{out} , U_0 .

Исследование математической модели. Решения уравнений (1) и (2) можно находить методом вариации произвольных постоянных [3]. На каждом интервале $(2nt_0, 2(n+1)t_0)$, $n=0, 1, \dots$ решение уравнения (1) определяется формулой

$$U(t) = U_{in} - e^{-\frac{k_1}{t_0}(t-2nt_0)} (U_{in} - U(2nt_0 + 0)), \quad t \in (2nt_0, 2(n+1)t_0), \quad (5)$$

где $U(2nt_0 + 0)$ – предел функции $U(t)$ в точке $2nt_0$ справа. Аналогично на каждом интервале $(2nt_0 + t_0, 2(n+1)t_0)$, $n=0, 1, \dots$ решение уравнения (2) определяется формулой

$$U(t) = U_{out} + e^{-\frac{k_2}{t_0}(t-(2n+1)t_0)} (U((2n+1)t_0 + 0) - U_{out}), \quad t \in (2nt_0 + t_0, 2(n+1)t_0), \quad n=0, 1, \dots, \quad (6)$$

где $U((2n+1)t_0 + 0)$ – предел функции $U(t)$ в точке $(2n+1)t_0$ справа. Таким образом, формулы (5) и (6) вместе с начальным условием (3) и условием согласованности (4) описывают температурный режим.

Найдем, при каком значении начальной температуры U_0 решение задачи (1)–(4), определяемое формулами (5), (6) и условиями (3), (4), будет периодическим с периодом, равным $2t_0$, т.е. выполняется условие периодичности $U(0)=U(2t_0)$. Для этого в формуле (5) для первого этапа времени $0 < t < t_0$ положим $t = t_0$:

$$U(t) = U_{in} - e^{-\frac{k_1}{t_0}t} (U_{in} - U_0), \quad U(t_0) = U_{in} - e^{-k_1} (U_{in} - U_0).$$

Полученное значение $U(t_0)$, в силу условий согласованности (4), возьмем в качестве начального значения в формуле (6) для второго этапа времени $t_0 < t < 2t_0$:

$$U(t) = U_{out} + e^{-\frac{k_2}{t_0}(t-t_0)} (U_{in} - e^{-k_1} (U_{in} - U_0) - U_{out}).$$

В этой формуле положим $t = 2t_0$:

$$U(2t_0) = U_{out} + e^{-k_2} (U_{in} - e^{-k_1} (U_{in} - U_0) - U_{out}).$$

В силу условия периодичности $U(0)=U(2t_0)$, для искомого значения U_0 получаем следующее уравнение:

$$U_0 = U_{out} + e^{-k_2} (U_{in} - e^{-k_1} (U_{in} - U_0) - U_{out}).$$

Отсюда находим U_0 :

$$U_0 = U_{out} + e^{-k_2} U_{in} - e^{-k_2} U_{out} - e^{-k_1-k_2} U_{in} + e^{-k_1-k_2} U_0. \\ U_0 = \frac{e^{-k_2}(1-e^{-k_1})}{1-e^{-k_1-k_2}} U_{in} + \frac{1-e^{-k_2}}{1-e^{-k_1-k_2}} U_{out}. \quad (7)$$

Таким образом, функция $U(t)$, определяемая формулами (5), (6), при начальном значении (7) будет периодическим решением задачи (1)–(4) с периодом равным $2t_0$. Другими словами, формулами (5)–(7) определяется единственный периодический температурный режим.

Устойчивость периодического режима. Пусть $U(t)$ – периодическое решение задачи (1)–(4). Покажем, что данное решение устойчиво [3]: любое другое решение $V(t)$ задачи (1)–(4) с начальным значением $V(0) \in [U_{out}, U_{in}]$ стремится к $U(t)$ при возрастании времени:

$$|V(t) - U(t)| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Для функций $U(t)$, $V(t)$ имеем:

$$U'(t) + k(t)U(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$V'(t) + k(t)V(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

где

$$k(t) = \begin{cases} \frac{k_1}{t_0}, & t \in (0, t_0) \cup (2t_0, 3t_0) \cup \dots \\ \frac{k_2}{t_0}, & t \in (t_0, 2t_0) \cup (3t_0, 4t_0) \cup \dots \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k_1}{t_0} U_{in}, & t \in (0, t_0) \cup (2t_0, 3t_0) \cup \dots \\ \frac{k_2}{t_0} U_{out}, & t \in (t_0, 2t_0) \cup (3t_0, 4t_0) \cup \dots \end{cases}$$

Из уравнения (9), вычитая уравнение (8), получим:

$$(V(t) - U(t))' + k(t)(V(t) - U(t)) = 0.$$

Решение $(V(t) - U(t))$ полученного дифференциального уравнения находим методом вариации произвольных постоянных [3]:

$$(V(t) - U(t)) = (V(0) - U(0)) e^{-\int_0^t k(s) ds}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует (8), если докажем, что

$$\int_0^t k(s) ds \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Проверим, что (12) действительно имеет место:

$$\begin{aligned} \int_0^t k(s) ds &= \int_0^{t_0} k(s) ds + \int_{t_0}^{2t_0} k(s) ds + \dots + \int_{nt_0}^t k(s) ds = \\ &= \underbrace{\int_0^{t_0} \frac{k_1}{t_0} ds + \int_{t_0}^{2t_0} \frac{k_2}{t_0} ds + \dots}_{n+1} = \underbrace{k_1 + k_2 + \dots}_{n+1} \geq \frac{n+1}{2} k_1, \end{aligned}$$

где $n = \left[\frac{t}{t_0} \right]$ – целая часть $\frac{t}{t_0}$. Отсюда следует неравенство

$$\int_0^t k(s) ds \geq \frac{k_1}{2} \left(1 + \left[\frac{t}{t_0} \right] \right).$$

В последнем неравенстве правая часть стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, интеграл также стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Значит, (12) верно.

Определение коэффициентов энергоэффективности насадки. Коэффициенты энергоэффективности k_1 и k_2 можно определить, если известны минимальное $U_{\min}$ и максимальное $U_{\max}$ значения периодического режима $U(t)$. Для периодического режима $U(t)$ имеем: $U(0) = U_{\min}$, $U(t_0) = U_{\max}$. Следовательно, по формуле (5) получим:

$$U_{\max} = U_{in} - e^{-k_1} (U_{in} - U_{\min}).$$

Отсюда находим коэффициент k_1 :

$$k_1 = \ln \frac{U_{in} - U_{\min}}{U_{in} - U_{\max}}. \quad (13)$$

Для нахождения k_2 воспользуемся формулой (7):

$$U_{\min} = \frac{e^{-k_2} (1 - e^{-k_1})}{1 - e^{-k_1 - k_2}} U_{in} + \frac{1 - e^{-k_2}}{1 - e^{-k_1 - k_2}} U_{out}.$$

Отсюда находим k_2 :

$$k_2 = \ln \frac{U_{\max} - U_{out}}{U_{\min} - U_{out}}. \quad (14)$$

Таким образом, по формулам (13) и (14) можно определить коэффициенты энергоэффективности k_1 и k_2 .

Нахождение коэффициентов энергоэффективности на основе экспериментальных данных. Из устойчивости периодического режима $U(t)$ следует, что можно экспериментально измерять его мак-

симальное и минимальное значения – $U_{\max}$ и $U_{\min}$, так как максимальное и минимальное значения любого другого температурного режима приближаются к $U_{\max}$ и $U_{\min}$. Затем по экспериментальным значениям $U_{\max}$ и $U_{\min}$ можно находить коэффициенты энергоэффективности k_1 и k_2 ; при этом погрешности измерений существенно не влияют на значения k_1 и k_2 . В таблице приведены результаты экспериментальных измерений $U_{\max}$, $U_{\min}$ и вычисленные по формулам (13), (14) значения коэффициентов энергоэффективности k_1 и k_2 . Эксперимент проведен при температуре внутренней среды $U_{in} = 36,0^\circ\text{C}$ и наружной среды $U_{out} = -9,1^\circ\text{C}$. На рисунке представлены график периодического температурного режима, соответствующего вычисленным значениям k_1 и k_2 , и точки 1–8, соответствующие экспериментальным измерениям $U_{\max}$ и $U_{\min}$.

Таблица

Коэффициенты энергоэффективности, определенные по результатам эксперимента

Номер точки	1	2	3	4	Среднее	k_1	k_2
$U_{\max}$	25,7	24,3	26,0	27,4	25,9	1,1	0,9
Номер точки	5	6	7	8	-		
$U_{\min}$	5,4	4,8	4,9	5,3	5,1		

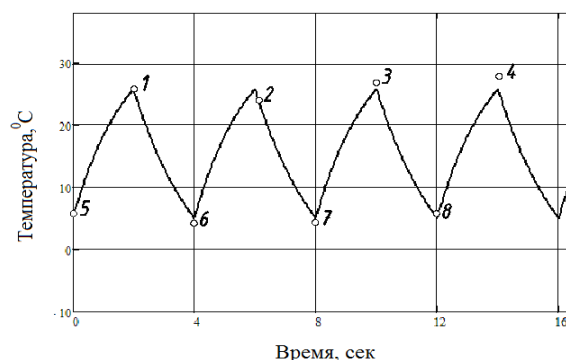


Рисунок. График периодического температурного режима и точки измерения

Выводы

Проведенное исследование и полученные результаты позволяют рассчитать конкретными формулами изменение температуры на этапах аккумуляции и регенерации тепловой энергии. Из полученных формул следует, что:

1) изменение температуры насадки во времени зависит от начальной температуры насадки, коэффициентов теплоотдачи и температуры воздуха внутри и вне помещения;

2) при одном значении начальной температуры насадки изменение температуры насадки во времени происходит периодически, т.е. существует единственный периодический режим;

3) любой другой температурный режим – изменение температуры насадки во времени с любым начальным значением при возрастании времени приближается к периодическому режиму;

4) коэффициенты энергоэффективности можно явно находить, если известны максимальное и минимальное значения периодического режима;

5) на основе экспериментальных данных о максимальном и минимальном значениях периодического режима можно находить коэффициенты энергоэффективности для конкретных материалов насадки.

Результаты работы дают ясное представление о процессе аккумуляции и регенерации тепловой энергии в регенеративном теплообменнике; их можно взять за основу при построении и исследовании сложных математических моделей регенеративного теплообменника.

Литература

1. Васильев В.А. Методы расчета тепловых процессов в стационарном переключающемся регенеративном теплоутилизаторе: дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2010. 136 с.
2. Гудков С.В., Филатова Е.Ю., Туголуков Е.Н., Алексеев С.Ю., Романенко А.В. Выбор рациональной конструкции регенеративного теплообменника для использования в системе автоматизированного проектирования индивидуальных дыхательных аппаратов // Вопросы Современной науки и техники. Университет им. В.И. Вернадского. 2006. № 2(4). С. 69–76.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. 1967. 472 с.
4. Монаркин Н.Н., Наимов А.Н., Синицын А.А., Рогulina Т.В. Математическая модель процесса аккумуляции тепловой энергии в стационарном переключающемся ре-

генеративном теплоутилизаторе // Фундаментальные исследования. 2014. №11. Ч. 4. С. 759–764.

5. Находкин В.П. Разработка средств индивидуальной защиты органов дыхания и методических рекомендаций по их применению в условиях отрицательных температур: дис. ... канд. техн. наук. Якутск, 2005. 135 с.

References

1. Vasil'ev V.A. *Metody rascheta teplovykh processov v stacionarnom perekliuchaiushchemsya regenerativnom teploutilizatore* [Methods of calculating the thermal processes in the stationary switches the regenerative flow heat recovery. Dr. dis.]. St. Petersburg, 2010.
2. Gudkov S.V., Filatova E.Ju., Tugolukov E.N., Alekseev S.Ju., Romanenko A.V. *Vybor racional'noi konstrukcii regenerativnogo teplotobmennika dlia ispol'zovaniia v sisteme avtomatizirovannogo proektirovaniia individual'nykh dyhatel'nykh apparatov* [Selecting the rational design of a regenerative heat exchanger for use in computer-aided design of individual SCBA]. *Voprosy Sovremennoi nauki i tekhniki. Universitet im. V.I. Vernadskogo* [Issues of Modern Science and Technology. University V.I. Vernadsky], 2006, № 2(4), pp. 69–76.
3. Demidovich B.P. *Lekcii po matematicheskoi teorii ustoi-chivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, 1967.
4. Monarkin N.N., Naimov A.N., Sinicyn A.A., Rogulina T.V. *Matematicheskaiia model' processa akkumuliatsii teplovoi energii v stacionarnom perekliuchaiushchemsya regenerativnom teploutilizatore* [The mathematical model of heat accumulation in the stationary switches the regenerative flow heat recovery]. *Fundamental'nye issledovaniia* [Fundamental research], 2014, №11, Vol. 4, pp. 759–764.
5. Nahodkin V.P. *Razrabotka sredstv individual'noi zashchity organov dyhaniia i metodi-cheskikh rekomendacii po ih primeneniiu v usloviiah otricatel'nykh temperatur* [Development of personal respiratory protection and guidelines for their use in subzero temperatures. Dr. dis.]. Yakutsk, 2005.

УДК 536.2

С.Ю. Осипов

Тверской государственный технический университет,

Ю.Р. Осипов, Д.А. Богданов

Вологодский государственный университет

МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ И ИНТЕНСИФИКАЦИИ РЕЖИМОВ ТЕРМООБРАБОТКИ ПОКРЫТИЙ ГУММИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ. ОБЗОР

Получены и исследованы математические модели процесса тепломассопереноса при вулканизации покрытий гуммированных объектов, которые позволяют повысить эффективность производственных процессов, повысить качество продукции, уменьшить энергозатраты. Получены соотношения, которые позволяют аналитически описать распределение температуры и вулканизирующего агента практически во всех возможных случаях конструкций многослойного гуммированного изделия при предварительной термообработке и вулканизации.

Модели теплотеноса, модели массопереноса, вулканизация, охлаждение, технологические режимы, теплообмен, гуммировочные покрытия, термообработка, эластомерные покрытия.

Mathematical models of heat-and-mass transfer process during vulcanization of rubberized objects, which allows to enhance the effectiveness of production processes, improve the quality of the product and reduce power inputs, are obtained and studied. Ratios, which allow to describe analytically temperature and vulcanizing agent distribution in almost every possible type of sandwiched rubberized product during preliminary thermal treatment and vulcanization, are obtained.

Models of heat transfer, models of mass transfer, curing, cooling, technological modes, heat exchange, gummed cover, heat treatment, elastomeric coverings.