4. *Tulloch, M.* Windows 7 – Resource Kit / Mitch Tulloch, Tony Northrup, Jerry Honneycutt–Redmont. – Washington 98052-6399: Microsoft Press, 2010. – P. 90 – 91.

УДК 519.63

Н.Н. Синицын, З.К. Кабаков, Д.А. Домрачев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУШКИ КОРЫ ДЕРЕВЬЕВ ПРИ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОМ НАГРЕВЕ

В статье предложено математическое описание процесса сушки коры деревьев при высокоинтенсивном прогреве, изложен способ тестирования численной модели сушки коры с использованием точного решения задачи Стефана. Представлены результаты исследования влияния настроечных параметров численного алгоритма на погрешность результата моделирования.

Математическая модель сушки коры деревьев, тестирование, задача Стефана, погрешность решения.

The article presents the mathematical description of the process of the bark drying at high-intensity warming up and the way of testing of a numerical model of bark drying using the exact solution of the Stefan problem. The results of influence of adjusting parameters of a numerical algorithm on the modeling error are presented in the paper.

Mathematical model of bark drying, testing, Stephane's task, decision error.

В настоящее время все древесные отходы, кроме коры хвойных и лиственных пород деревьев, используются в производстве фанеры, древесно-стружечных и древесно-волокнистых плит. Кора не используется для их изготовления из-за своих характеристик. Единственный способ применения коры – применение ее в качестве топлива для теплогенерирующих установок. Однако высокая влажность коры вызывает большие трудности при ее сжигании в топках котлов без дополнительного высококалорийного топлива. В настоящее время отсутствуют высокоэффективные технологии сжигания такого материала.

В связи с этим разработка технологии высокоэффективного использования отходов производства (коры деревьев) в качестве топлива является актуальной задачей для промышленных и энергетических объектов.

Одним из способов повышения эффективности сжигания коры является ее предварительная сушка перед сжиганием. При сушке сначала происходит испарение влаги на поверхности коры, затем возникает фронт, отделяющий сухой и влажный слои. Фронт сушки перемещается от поверхности внутрь коры. Целью моделирования является определение координаты фронта и температуры поля в сухой и влажной частях. Рассмотрим процесс сушки на примере формы коры в виде пластины. Для этого приведем математическую модель одномерного симметричного процесса сушки пластины из коры, которая включает в себя сквозное уравнение теплопроводности, общее для влажной и сухой зон пластины:

$$c_{эф}(T)\cdot\rho(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}), \qquad (1)$$

интегрируемое в области: $0\le x\le S$, $0\le\tau\le\tau_k$;

– начальное условие:

$$T\big|_{\tau=0}=T^0; \qquad (2)$$

– граничное условие:

при $x=0$ $\quad -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha(T-T_{ср}); \qquad (3)$

при $x=S$ $\quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad (4)$

где ρ – плотность материала; α – коэффициент теплоотдачи; S – половина толщины пластины; $T_{ср}$ – температура среды; T^0 – начальная температура материала; λ – коэффициент теплопроводности.

При этом выделение теплоты фазового перехода в уравнении (1) учитывают с помощью эффективной теплоемкости $c_{эф}$, задаваемой выражением:

$$c_{эф}=\begin{cases} c_1(T), & T>T_л;\\ c(T_c)\cdot\psi+c(T_л)\cdot(1-\psi)+\dfrac{g\cdot L}{\Delta T}, & T_c\le T\le T_л;\\ c_2(T), & T<T_c, \end{cases}$$

коэффициент теплопроводности и плотность определяют по формулам:

$$\lambda=\begin{cases} \lambda_1, & T<T_c;\\ \lambda_1\cdot\psi+\lambda_2(1-\psi), & T_c\le T\le T_л;\\ \lambda_2, & T>T_л, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & T > T_л; \\ \rho_1 \cdot \psi + \rho_2(1-\psi), & T_c \le T \le T_л; \\ \rho_2, & T < T_c, \end{cases}$$

где $T_л = T_ф + 19{,}5$, $T_c = T_ф - 37$ – фиктивные температуры начала и окончания фазового перехода воды; $c(T)$, – теплоемкость материала; c_1 и c_2 – теплоемкость сухого и влажного слоев материала; ρ_1 и ρ_2 – плотность сухого и влажного слоев материала; λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности сухого и влажного слоев материала; g – доля влаги в элементарном объеме материала; S – половина толщины слоя материала; L – удельная теплота фазового перехода влаги; ψ – доля влажного материала.

Величина ψ определяется по формуле:

$$\psi = \begin{cases} 1, & T < T_c; \\ \dfrac{T_л - T}{T_л - T_c}, & T_c \le T \le T_л; \\ 0, & T > T_л. \end{cases}$$

На рис. 1 показана схема расчетной области.

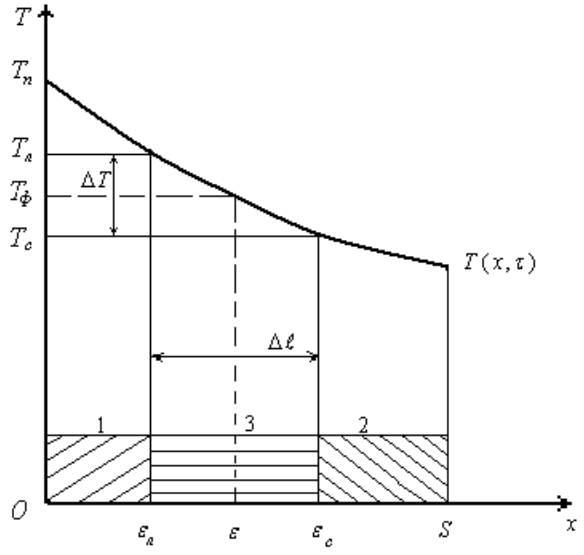


Рис. 1. Схема расчетной области

Расчетная область: 1 – сухая зона; 2 – влажная зона; 3 – двухфазная зона; $\Delta\ell$ – ширина двухфазной зоны; $\varepsilon_c, \varepsilon, \varepsilon_л$ – координаты границ начала двухфазной зоны, фазового перехода, окончания двухфазной зоны соответствующих температур T_c, $T_ф$, $T_л$ и $T_п$ – температуры поверхности.

Система уравнений (1) – (4) в общем случае может быть решена только численным методом. При использовании метода конечных разностей (МКР) значение температур определяют в узлах расчетной области, координаты которых находят по формуле: $x_i = (i - 0{,}5)\Delta x$, для дискретных моментов времени $\tau^n = \Delta\tau \cdot n$, где $i = \overline{0, N+1}$, N – количество узлов внутри расчетной области, 0 и $N+1$ – номера фиктивных узлов, находящихся за пределами области на расстоянии $\Delta x/2$; $\Delta x = S/N$ – расстояние между узлами; $n = \overline{0, [\tau_k / \Delta\tau]}$ – моменты времени (n = 0 – начальный момент времени); $\Delta\tau$ – расчетный шаг по времени. Для краткости температуры $T(x_i, \tau^n)$ – обозначают T_i^n.

При использовании явной схемы аппроксимации производных по координате температуру в следующий момент времени n + 1 в N внутренних узлах определяют по формуле:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta\tau}{c(T_i^n)\cdot\rho(T_i^n)\cdot\Delta x^2} \times$$

$$\times\left[\lambda_{i+\frac{1}{2}}\cdot(T_{i+1} - T_i) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\cdot(T_i - T_{i-1})\right]^n,$$

где $i = \overline{1, N}$, $\lambda_{1+\frac{1}{2}} = \lambda\ \dfrac{T_{i+1}^n + T_i^n}{2}$, $\lambda_{1-\frac{1}{2}} = \lambda\ \dfrac{T_{i-1}^n + T_i^n}{2}$.

Температуру в начальный момент времени задают по формуле:

$$T_i = T^0 \text{ для } i = \overline{0, N+1}.$$

Температуру в фиктивных узлах: $i = 0$ и $N+1$ в момент времени $n+1$ определяют по формулам:

$$T_0 = \frac{(1-\chi)\cdot T_1 + 2\cdot\chi\cdot T_{cp}}{1+\chi}, \quad \chi = \frac{\alpha\cdot\Delta x}{2\lambda}, \quad T_{N+1} = T_N.$$

Расположение границы перехода воды в пар определяют в поле температуры по температуре фазового перехода влаги в цикле по $i = \overline{2...N}$ из условия:

$$\text{если } T_{i-1} \ge T_ф \ge T_i;$$

$$\text{то } \varepsilon = \Delta x(i - 3/2) + \Delta x \cdot \frac{T_{i-1} - T_ф}{T_{i-1} - T_i}.$$

Численное решение при явной схеме аппроксимации является условно устойчивым. В этом случае расчетный шаг определяем по формуле: $\Delta\tau = \Delta x^2 / (k_y \cdot a)$, где $k_y \ge 2$.

Погрешность численного решения будет зависеть от настроечных параметров алгоритма N, k_y и ΔT. Необходимо эти параметры выбрать таким образом, чтобы погрешность результатов моделирования не превосходила заданную.

Для выбора этих параметров выполним тестирование численного решения задачи Стефана путем сравнения с точным решением этой задачи [1], кото-

рое известно для граничного условия I рода и включает поле температуры:

– в сухой зоне:

$$T_1(x,\tau) = T_n + (T_\phi - T_\text{п}) \cdot \frac{erf(\frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}})}{erf(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}})}, \qquad (5)$$

– во влажной зоне:

$$T_2(x,\tau) = T^0 - (T^0 - T_\phi) \cdot \frac{erfc(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}})}{erfc(\frac{\beta}{2\sqrt{a_2}})}, \qquad (6)$$

и формулу для расчета координаты границы фазового перехода воды:

$$\varepsilon = \beta\sqrt{\tau}, \qquad (7)$$

где β – корень трансцендентного уравнения (8):

$$\frac{\lambda_1(T_\phi - T^0)}{\sqrt{a_1} \cdot erf(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}})} \cdot \exp(-\frac{\beta^2}{4a_1}) - \frac{\lambda_2 \cdot (T^0 - T_\phi)}{\sqrt{a_2} \cdot erfc(\frac{\beta}{2\sqrt{a_2}})} \times \exp(-\frac{\beta^2}{4a_2}) = \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \beta \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (8)$$

В формулах (5) – (8) использованы следующие обозначения: λ_1 и λ_2 – теплопроводности сухой и влажной зон материала, $a_i = \lambda_i / (c_i \cdot \rho_i)$ – температуропроводность ($i = 1$ – сухая зона, $i = 2$ – влажная зона), c_i, ρ_i – теплоемкость и плотность, $T_\text{п}$ – температура поверхности, T^0 – начальная температура материала, $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$, $erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$.

Выполним тестирование для пластины толщиной $5S = 0,01\,25$ м, нагреваемой в симметричных условиях. Исходные данные для моделирования и расчета по формулам (5) – (8) приведены в таблице.

Размер расчетной области и граничные условия для модели выберем с учетом того, что точное решение получено для граничных условий первого рода и расчетной области в виде полупространства, а задача сушки сформулирована для граничных условий третьего рода и расчетной области конечной толщины. При тестировании исследовали влияние настроечных параметров конечно-разностного решения задачи на результаты и погрешность моделирования. Результат исследования приведен на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при N = 140 численное решение практически совпадает с точным.

Таблица

Исходные данные

№ п/п	Величина, размерность	Значение величины	
		В модели	В точном значении
1	Половина толщины, 5 S, м	0,0125	∞
2	Начальная температура, ºС	180	180
3	Температура поверхности, ºС		20
4	Температура среды, ºС	20	
5	Плотность влажной зоны, кг/м^3	821	821
6	Плотность сухой зоны, кг/м^3	718	718
7	Коэффициент теплопроводности влажной зоны, Вт/(м·К)	0,4629	0,4629
8	Коэффициент теплопроводности сухой зоны, Вт/(м·К)	0,4629	0,4629
9	Теплоемкость влажной зоны, Дж(кг·К)	3498	3498
10	Теплоемкость сухой зоны, Дж(кг·К)	2720	2720
11	Температуры фазового перехода, ºС	100	100
12	Удельная теплота фазового перехода, Дж/кг	2256800	2256800
13	Коэффициент теплоотдачи, Вт(м^2·К)	10^{10}	
14	Конечное время процесса, с	245,36	245,36
15	Фиктивный интервал ΔT, ºС	56,5	
16	Доля влаги, кг/кг сухого зоны	0,25	0,25

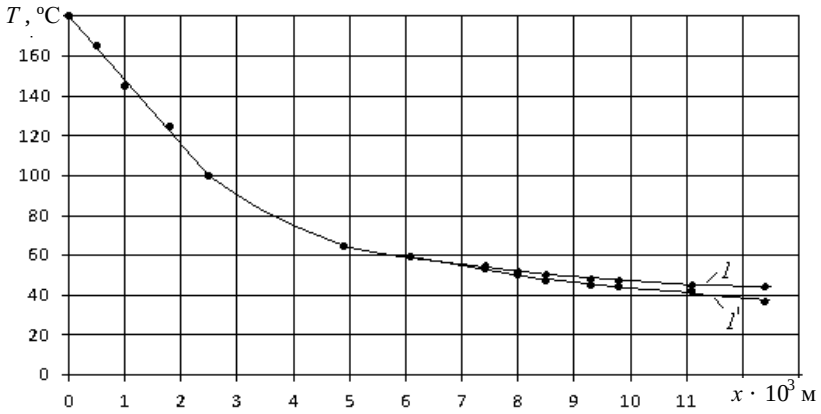


Рис. 2. Распределение температуры по толщине пластины
1 – решение по модели; 1' – точное решение; модель при N = 40; k_y = 3;
$T_л$ = 119,5 ºС ; T_c = 63 ºС; ΔT = 119,5 – 63 = 56,5 ºС; $\tau = 245,36$ ºС

В данной работе проведено также исследование влияния количества узлов N и параметра k_y на среднеквадратичную погрешность моделирования координаты фазового перехода. Величину среднеквадратичной погрешности определяем по формуле:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{n^*} \sum_{n=1}^{n^*} (\varepsilon_n - \varepsilon_n^*)^2} \cdot 100\%,$$

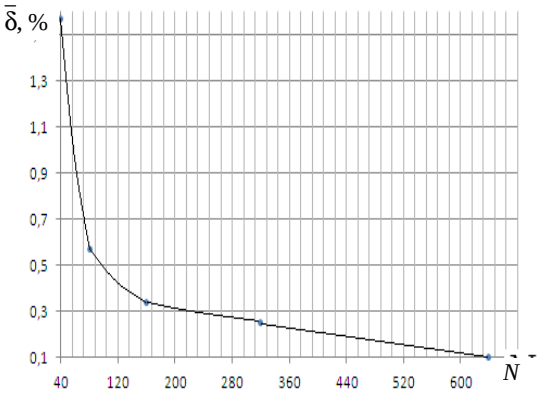
где $n^* = \tau_k / \Delta\tau$, $\bar{\varepsilon}$ – среднеарифметическое значение координаты фазового перехода воды; ε_n – результат моделирования координаты фазового перехода в момент времени n, ε_n^* – точное решение в момент времени n.

Результаты моделирования приведены на рис. 3.

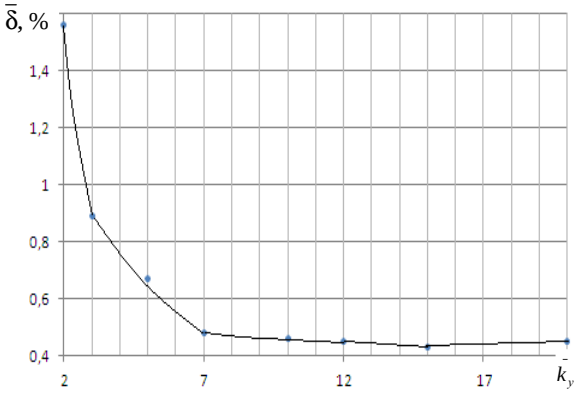
Как видно из рис. 3а, с увеличением N более 640 узлов погрешность асимптотически стремится к нулю. При увеличении k_y погрешность уменьшается. При k_y = 15 погрешность начинает увеличиваться. Учитывая, что при k_y = 3 погрешность меньше 1 % – в дальнейшем исследовании принимаем k_y = 3.

Исследование влияния фиктивного интервала ΔT показало, что имеется несимметричный интервал «размазывания» теплоемкости в окрестности температуры фазового перехода, при котором численное решение по динамике координаты перехода имеет наименьшее значение среднеквадратичной погрешности.

Следует отметить, что такое большое количество узлов, обеспечивающее погрешность менее 1 %, обусловлено «жестким» граничным условием I рода. При исследовании граничных условий III рода следует ожидать существенного уменьшения допустимого количества узлов.



а)



б)

Рис. 3. Зависимость средней квадратичной погрешности $\bar{\delta}$ от количества узлов N и параметра k_y при параметре ΔT в интервале температур 63 ÷ 119,5 ºС.
а – параметр ΔT в интервале 63 ÷ 119,5 ºС, k_y = 2;
б – параметр ΔT в интервале 63 ÷ 119,5 ºС, N = 40.

Увеличение количества узлов и соответствующее уменьшение шага по времени, согласно условию устойчивости, влияет на уменьшение погрешности более эффективно, чем только уменьшение расчетного шага по времени при увеличении k_y.

В результате тестирования установлено, что для уменьшения средней относительной погрешности до 1 % необходимо взять количество узлов сетки не более 40. Следует отметить, что для менее «жесткого» граничного условия, например, III рода, это ограничение может измениться до существенно меньших *N*.

Литература

1. *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М., 1967.