В результате анализа графических зависимостей был определен оптимальный состав: В/Ц = 0,50; r = 0,60; цемент = 370 кг/м^3.

Результаты испытаний на водопоглощение оптимального состава бетона приведены в табл. 3.

Таблица 3

Испытание образцов на водопоглощение

Номер образца	Сушка			Водопоглощение				W_m, %	W_m,% серии обр.
	28.03	29.03	30.03	02.04	03.04	04.04	05.04		
1	2350	2280	2280	2355	2358	2360	2360	3,5	3,83
2	2310	2285	2284	2386	2390	2395	2395	4,9	
3	2310	2285	2285	2350	2353	2355	2355	3,1	

Бетон оптимального состава был также исследован на морозостойкость. Она определялась ускоренным методом путем насыщения образцов кубов бетона в 5 %-м растворе хлористого натрия. Согласно ГОСТ 10060.0-95 на проектируемую марку F50 данным способом необходимо провести 8 циклов замораживания и оттаивания в растворе хлористого натрия. Средняя прочность контрольных образцов составила 23,832 МПа, а средняя прочность образцов, прошедших испытания, – 22,94 МПа. Изменение средней прочности составило 3,74 %, что меньше нормативного (5 %).

Таким образом, характеристики полученного состава соответствуют бетону по прочности класса В15 ($R_{сж}$ = 37,53 МПа, по морозостойкости F50, водопоглощение не более 6 %). Полученный состав можно рекомендовать к использованию на установке “ATLAS” по производству колодезных элементов.

Литература

1. *Баженов, Ю.М.* Технология бетона, строительных изделий и конструкций / [Ю.М. Баженов и др.]. – М., 2006.

2. *Бердичевский, Г.И.* Производство сборных железобетонных изделий: справочник / [Г.И. Бердичевский и др.]; под ред. К.В. Михайлова, К.М. Королева. – М., 1989.

3. Лабораторный практикум по курсу технологии бетона и железобетонных изделий / А.В. Ферронская, В.И Стамбулко. – М.,1988.

4. *Сорокер, В.И.* Жесткие бетонные смеси в производстве сборного железобетона / В.И. Сорокер, Д.В. Довжик. – М., 1958.

5. Установка ATLAS компании Prinzing. – URL: http://www.prinzing-gmbh.de/russisch/prinzing.htm

УДК 519.63

Н.Н. Синицын, З.К. Кабаков, А.В. Степанова, А.Г. Малинов

МОДЕЛЬ ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖЕЛЕЗОРУДНОГО КОНЦЕНТРАТА

В статье приведено математическое описание алгоритмов процесса замораживания железорудного концентрата, проведено тестирование численной модели замораживания железорудного концентрата при граничных условиях первого рода. Представлены результаты исследования влияния настроечных параметров численного алгоритма на погрешность моделирования.

Математическая модель замораживания железорудного концентрата, тестирование, задача Стефана, погрешность решения.

The paper describes an algorithm of freezing process of iron ore concentrate; the numerical model of freezing of iron ore concentrate under the boundary conditions of the first kind has been tested. The influence of settings of the numerical algorithm on the simulation error has been presented.

Mathematical model of freezing of iron ore concentrate, testing, Stephen task, solution error.

Железорудный концентрат поставляется на металлургические предприятия в железнодорожных вагонах. Так как концентрат влажный, в зимний период он замерзает. Для выгрузки концентрата из вагона его необходимо размораживать. Для определения продолжительности размораживания необходимо знать степень замораживания концентрата. В связи с этим возникает необходимость в исследовании закономерностей замораживания концентрата. Для изучения закономерностей замораживания железорудного концентрата разработано математическое описание процесса. При разработке описания принято во внимание, что концентрат занимает форму в виде плоского слоя. Замораживание осуществляется принудительной конвекцией холодного воздуха. Математическая модель одномерного симметричного

процесса замораживания включает сквозное уравнение теплопроводности, общее для мерзлой, влажной зон и зоны замораживания:

$$c_{эф} \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}), \quad (1)$$

интегрируемое в области: $0 \le x \le S$, $0 \le \tau \le \tau_к$;

– начальное условие:

$$T(x, 0) = T_0, \quad (2)$$

– граничные условия:
при $x = 0$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left(T - T_{ср}\right); \quad (3)$$

при $x = S$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где α – коэффициент теплоотдачи.

В зоне замораживания влаги выделяется теплота, которую можно учесть в уравнении (1) с помощью эффективной теплоемкости $c_{эф}$:

$$c_{эф} = \begin{cases} c_1(T), \ T > T_л; \\ c\left(T_с\right)\psi + c(T_л)(1-\psi) + \dfrac{g\,L}{\Delta T} \ \ T_л \le T \le T_с. \\ c_2(T), \ T < T_с \end{cases}$$

Коэффициент теплопроводности и плотность определим по формулам:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, \ T < T_с; \\ \lambda_1 \ \psi + \lambda_2 (1-\psi), \ T_с \le T \le T_л; \\ \lambda_2, \ T > T_л. \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, \ T < T_с; \\ \rho_1 \ \psi + \rho_2 (1-\psi), \ T_с \le T \le T_л; \\ \rho_2, \ T > T_л, \end{cases}$$

где $T_л = T_3 + \Delta T/2$, $T_с = T_3 - \Delta T/2$ – фиктивные температуры начала и окончания замораживания элементарного объема; ΔT – фиктивный интервал температуры замерзания воды; $c(T)$ – теплоемкость материала; c_1 и c_2 – теплоемкости замороженного и влажного материала; ρ_1 и ρ_2 – плотности замороженного и влажного материала; λ_1 и λ_2 – коэффициент теплопроводности замороженного и влажного материала; g – доля влаги в элементе объема; S – половина толщины слоя материала; L –удельная теплота замораживания влаги, ψ – доля замороженного концентрата.

Величина ψ определяется по формуле:

$$\Psi = \begin{cases} 1, \ T < T_с; \\ \dfrac{T_л - T}{T_л - T_с}, \ T_с < T < T_л; \\ 0, \ T > T_л. \end{cases}$$

На рис. 1 показана схема расчетной области замораживания половины толщины слоя железорудного концентрата.

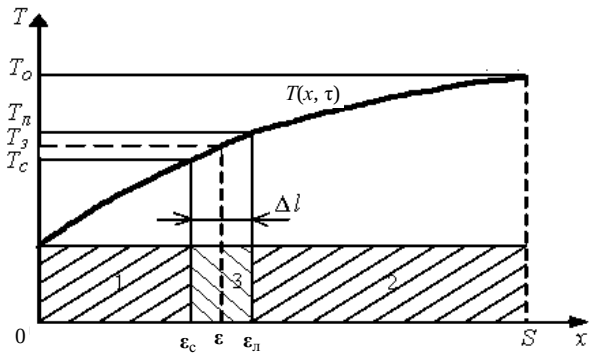


Рис. 1. Схема расчетной области:
1 – твердая зона; 2 – влажная зона; 3 – двухфазная зона; $\varepsilon_с$, ε и $\varepsilon_л$ – координаты изотерм окончания замораживания влаги и начала замораживания влаги

Система уравнений (1) – (4) решена численным методом. При использовании метода конечных разностей (МКР) значения температуры находят в узлах расчетной области, координаты которых рассчитываются по формуле:

$$x_i = (i - 0{,}5) \cdot \Delta x,$$

для дискретных моментов времени $\tau^n = \Delta\tau \cdot n$, где $i = \overline{0, N+1}$, N – количество узлов внутри расчетной области; 0 и $N + 1$ – номера фиктивных узлов, находящиеся за пределами области на расстоянии $\Delta x/2$; $\Delta x = \dfrac{S}{N}$ – расстояние между узлами; $n = \overline{0, [\tau_к / \Delta\tau]}$ – моменты времени ($n = 0$ – начальный момент времени); $\Delta\tau$ – расчетный шаг по времени. Для краткости температуры $T(x_i,\tau^n)$ обозначают T_i^n.

При использовании явной схемы аппроксимация производных по координате температуру в N внутренних узлах в момент времени $n + 1$ определяют по формуле:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta\tau}{c\left(T_i^n\right)\rho\left(T_i^n\right)\Delta x^2} \times$$

$$\times \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(T_{i+1} - T_i\right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(T_i - T_{i-1}\right) \right]^n,$$

где $i = \overline{1, N}$, $\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \lambda\left(\dfrac{T_{i+1}^n + T_i^n}{2}\right)$, $\lambda_{i-\frac{1}{2}} = \lambda\left(\dfrac{T_{i-1}^n + T_i^n}{2}\right)$.

Температуру в начальный момент времени задают по формуле:

$$T_i = T_0 \text{ для } i = \overline{0, N+1}.$$

Температуру в фиктивных узлах в $n + 1$ момент времени определяют по формулам:

$$T_0 = \frac{(1-\chi)T_1 + 2\chi T_{\text{ср}}}{1+\chi}, \quad \chi = \frac{\alpha \Delta x}{2\lambda}; \; T_{N+1} = T_N.$$

Толщину твердой корки определяют по координате изотермы температуры замораживания влаги в поле температуры в цикле по $i = \overline{2...N}$ из условия:

$$\text{если } T_{i-1} \le T_з \le T_i, \text{ то } \varepsilon = \Delta x\left(i - \frac{3}{2}\right) + \Delta x \frac{T_з - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}}.$$

Численное решение при явной схеме аппроксимации является условно устойчивым. В этом случае расчетный шаг определяем по формуле: $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{k_y\, a}$, где $k_y > 2$.

Погрешность численного решения в данном случае будет зависеть от настроечных параметров алгоритма N, k_y, ΔT. Необходимо эти параметры выбрать таким образом, чтобы погрешность результатов моделирования не превосходила заданную.

В данной работе для тестирования численного решения используется аналитическое решение задачи Стефана [1], которое приведено для граничного условия I рода и включает поля температуры:

– в мерзлой зоне:

$$T_1(x,\tau) = T_П + (T_з - T_п)\cdot \frac{erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}\right)}{erf\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right)}, \quad (5)$$

– во влажной зоне:

$$T_2(x,\tau) = T_0 - (T_0 - T_з)\cdot \frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right)}{erfc\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_2}}\right)} \quad (6)$$

и формулу для расчета координат границы фазового перехода влаги:

$$\varepsilon = \beta\sqrt{\tau}, \quad (7)$$

где β – корень трансцендентного уравнения (8):

$$\frac{\lambda_1(T_3 - T_0)}{\sqrt{a_1}\cdot erf\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right)}\cdot \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right) + \frac{\lambda_2\cdot(T_0 - T_3)}{\sqrt{a_2}\,erfc\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_2}}\right)}\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_2}\right) = \rho_2 W L \beta \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$

В формулах (5) – (8) использованы следующие обозначения: λ_1 и λ_2 – теплопроводность мерзлой и влажной зон, $a_i = \frac{\lambda_i}{c_i\,\rho_i}$ – температуропроводность (i=1 мерзлая зона, i = 2 – влажная зона), $c_i\,\rho_i$ – теплоемкость и плотность, T_n – температура поверхности, T_0 – начальная температура материала, $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\zeta^2} d\xi$; $erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$.

Тестирование выполним для пластины толщиной $5S$ = 1,5 м, охлаждаемой в симметричных условиях. Исходные данные для моделирования и расчета по формулам (5) – (8) приведены в таблице.

Размер расчетной области и граничные условия для модели выберем с учетом того, что точное решение получено для граничных условий первого рода и расчетной области в виде полупространства, а для граничных условий третьего рода и расчетной области конечной толщины.

Таблица

Исходные данные

Номер п/п	Величина, размерность	Значение	
		в модели	в точном решении
1	Половина толщины, $5S$ м	1,5	∞
2	Начальная температура, °С	25	25
3	Температура поверхности, °С		-30
4	Температура среды, °С	-30	
5	Плотность мерзлой зоны, кг/м^3	1795	1795
6	Плотность влажной зоны, кг/м^2	1858	1858
7	Коэффициент теплопроводности мерзлой зоны, Вт/мК	0,586	0,586
8	Коэффициент теплопроводности влажной зоны, Вт/мК	0,4	0,4
9	Теплоемкость мерзлой зоны, Дж/(кгК)	963	963
10	Теплоемкость влажной зоны, Дж/(кгК)	1353	1353
11	Температура замерзания, °С	0	0
12	Удельная теплота замерзания влаги, Дж/кг	333980	333980
13	Коэффициент теплоотдачи Вт/(м^{2}К)	10^{10}	
14	Полутолщина замораживаемого слоя, м	5S	—
15	Конечное время процесса, с	3600	3600
16	Фиктивный интервал ΔT, °С	16	16

Тестирование результатов моделирования выполним путем сравнения с точным решением и оценкой погрешности моделирования. При тестировании исследовали влияние настроечных параметров конечно-разностного решения задачи Стефана на результаты и погрешность моделирования. Результаты исследования влияния этих параметров приведены на рис. 2.

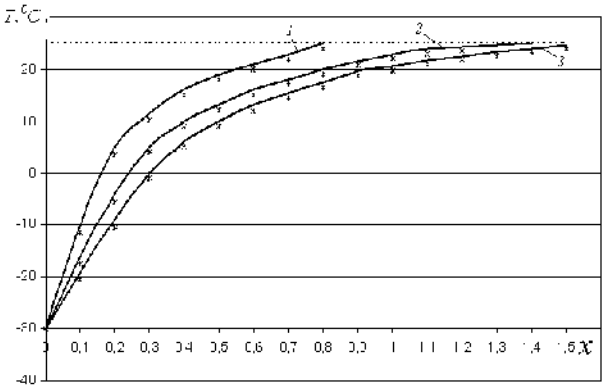


Рис. 2. Распределение температуры по толщине железорудного концентрата для различных моментов времени: 1 – 300000 с; 2 – 1000000 с; 3 – 1400000 с; точное решение; ✱ – модель при N = 50; k_y = 5; ΔT = 14 °С

Из рис. 2 видно, что при N = 50 численное решение практически совпадает с точным.

В данной работе проведено также исследование влияния количества узлов N, параметров k_y и ΔT на среднеквадратичную погрешность моделирования роста корки. Величину среднеквадратичной погрешности определяем по формуле:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{n^*} \sum_{n=1}^{n^*} (\varepsilon_n - \varepsilon_n^*)^2}\, 100\,\%,$$

где $n^* = \frac{\tau_k}{\Delta\tau}$, $\bar{\varepsilon}$ – среднеарифметическое значение координата фазового перехода воды, ε_n – результат моделирования в момент времени n; ε_n^* – точное решение в момент времени n.

Результаты исследования приведены на рис. 3.

Как видно на рис. За зависимость $\delta(N)$ носит нелинейный характер. С увеличением N погрешность резко снижается и при увеличении N более 75 узлов погрешность асимптотически стремится к 0. На рис. 3б видно, что при увеличении k_y (или уменьшении расчетного шага по времени) погрешность сначала уменьшается, а затем стабилизируется при k_y > 5. Учитывая, что при увеличении k_y рассчитываемая погрешность не возрастает, в дальнейших исследованиях принимаем k_y = 5.

Исследование влияния фиктивного интервала ΔT (рис. 3в) показало, что имеется экстремальное значение ΔT = 14 ^{0}С, при котором численное решение по динамике роста корки имеет наименьшее значение средней относительной погрешности.

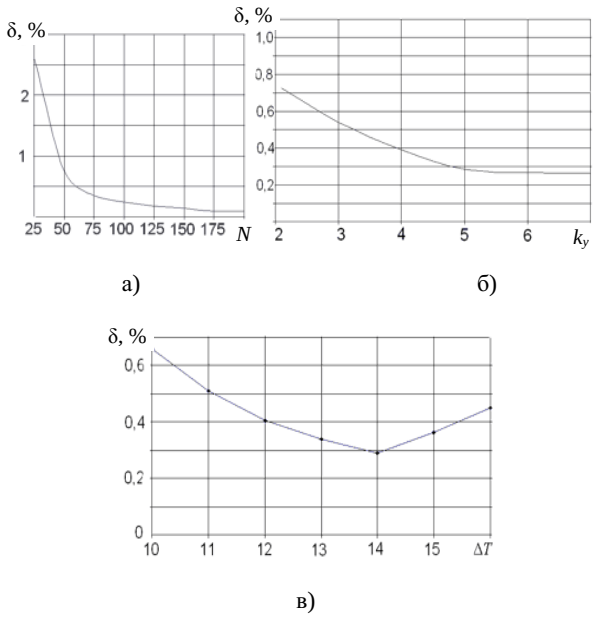


Рис. 3. Результаты исследования влияния количества узлов N (а), параметра k_y (б) и фиктивного интервала ΔT (в) на среднеквадратичную погрешность

Уменьшение ΔT приводит к тому, что количество узлов, попадающее в фиктивный интервал (Δl на рис. 1), становится недостаточным для аппроксимации источника теплоты замерзания воды. При увеличении ΔT > 14 °С погрешность повышается, также увеличивается различие характера температурного поля в окрестности координаты фазового перехода для численного и точного решений (рис. 2).

Следует отметить, что такое большое количество узлов, обеспечивающее погрешность менее 1 %, обусловлено «жестким» граничным условием I рода. При использовании граничных условий III рода следует ожидать существенного уменьшения допустимого количества узлов. Увеличение количества узлов и соответствующее уменьшение шага по времени, согласно условию устойчивости, влияет на уменьшение погрешности более эффективно, чем только уменьшение расчетного шага по времени при увеличении параметра k_y.

В результате тестирования установлено, что для уменьшения средней относительной погрешности до 1 % необходимо взять количество узлов сетки не менее 50. Следует отметить, что для менее «жесткого» граничного условия, например, III рода, это ограничение может измениться до существенно меньших N.

Литература

1. *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М., 1967.