

DOI 10.23859/1994-0637-2018-1-82-1

УДК 662.289:678.063

© Аваев А.А., Осипов Ю.Р., 2018

Аваев Александр Алексеевич

Кандидат технических наук, доцент,
Вологодский государственный университет
(Вологда, Россия)

Avaev Alexander Alexeevich

PhD in Technical Sciences, Associate
Professor, Vologda state university
(Vologda, Russia)

Осипов Юрий Романович

Заслуженный деятель науки Российской
Федерации, доктор технических наук,
профессор, Вологодский государственный
университет
(Вологда, Россия)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

Osipov Yury Romanovich

Honoured worker of science,
Doctor of technical sciences, professor,
Vologda State University
(Vologda, Russia)
E-mail: iur.osipov2011@yandex.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПРОЦЕССЕ
ТЕРМИЧЕСКОЙ ВУЛКАНИЗАЦИИ
ПОКРЫТИЯ ИЗ ЭЛАСТОМЕРА НА
МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ**

**MATHEMATIC MODEL OF THE
HEAT TRANSFER DURING
THERMAL VULCANIZATION
OF ELASTOMER COAT ON
THE METAL PLATE**

Аннотация. Данная работа представляет собой очередную попытку создать аналитическую модель переноса тепла в процессе термической вулканизации слоя эластомера, нанесенного на металлическую пластину. Данная задача связана с наличием тепловыделений и изменением тепловых параметров эластомера в течение процесса вулканизации. Несмотря на явную нелинейность этой задачи, была использована идея применения линейного уравнения теплопроводности. Теплообмен в системе «эластомер – металл» исследован применительно к процессу контактной термической вулканизации. Результаты расчетов, основанных на предлагаемой модели, иллюстрированы графически. Данный метод расчетов может быть использован в инженерной практике для совершенствования технологии термической вулканизации.

Abstract. This work is a next attempt to create the analytic model of heat conduction in the thermal vulcanization process of elastomer coat on the metal plate. The problem is connected with heat releases and the change of elastomer heat parameters during the vulcanization process. Despite the evident non-linearity of this problem the idea of linear heat conduction equation application was used. Heat transfer in the elastomer-metal system was investigated conformably to contact thermal vulcanization process. The calculation results which based on the proposed model are illustrated by graphics. This method of calculations may be used in the engineer practice for the improvement of thermal vulcanization technology.

Ключевые слова: аналитическая модель, теплопроводность, слой эластомера на металлической пластине, линейное уравнение теплопроводности, граничные условия, контактная термическая вулканизация

Keywords: analytic model, heat conduction, elastomer coat on metal plate, linear equation of heat conduction, boundary conditions, contact thermal vulcanization

Введение

Процесс термической вулканизации эластомерных покрытий на металлической пластине представляет собой сложный тепловой процесс, протекающий при изменяющихся во времени тепловых эффектах, которые приводят к изменению теплофизических свойств эластомера. Процесс вулканизации, кроме того, зависит от организации и режима теплообмена между объектом и внешней средой.

При вулканизации в индукционный период происходит течение эластомера, а при нагреве покрытия с большим содержанием вулканизирующего агента выделяется теплота вследствие экзотермической реакции вулканизации. В ходе вулканизации необходимо обеспечить такое распределение и изменение температуры во времени, при котором для данного типа эластомера свойства готового продукта оказались бы наилучшими при оптимальной организации всего технологического процесса [1].

Выбор режима вулканизации основан на анализе температурных полей в эластомерном покрытии и металлической пластине. Прогнозирование оптимального режима процесса вулканизации может быть осуществлено путем его математического моделирования, при этом достоверность и надежность работы подобной модели играет первостепенную роль.

Основная часть

В данной работе рассматривается процесс так называемой контактной термической вулканизации, когда на внешних поверхностях эластомерного покрытия и металлической подложки поддерживается заданная температура. Весь процесс разбивается на несколько этапов, в течение каждого из которых изменение теплофизических свойств эластомера, а также мощности действующего источника тепла, являются незначительными, а следовательно, могут считаться постоянными. При этом распределение температуры на момент окончания очередного этапа является начальным условием при описании следующего этапа. Такой подход к моделированию процесса вулканизации позволяет использовать линейное уравнение теплопроводности, решая аналитически систему данных уравнений для эластомера и металла.

Как известно, аналитическое решение в отличие от любого его численного варианта обеспечивает надежность сходимости соответствующих рядов Фурье [2] и позволяет достаточно точно оценивать погрешности производимых вычислений.

В качестве основы модели рассматривается бесконечная двухслойная пластина общей толщины $l_1 + l_2$, при этом диапазон изменения координаты x точек пластин описывается неравенством $-l_1 \leq x \leq l_2$; индекс $i = 1$ соответствует левой пластине, а индекс $i = 2$ – правой.

Линейные уравнения теплопроводности для левой и правой пластины имеют следующий вид

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{w_1}{c_1 \rho_1};$$

$$(-l_1 < x \leq 0)$$

$$\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{w_2}{c_2 \rho_2};$$

$$(0 < x < l_2)$$

где τ – текущее время, с; $t_i(x, \tau)$ – температура, °C; w_i – удельная мощность источника тепла, Вт/м³; a_i – коэффициент температуропроводности, м²/с; c_i – удельная теплоемкость, Дж/(кг °C); ρ_i – плотность, кг/м³.

Для решения системы уравнений (1)–(2) использованы следующие краевые условия

$$\begin{aligned} t_1(x, 0) &= \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1; \\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 &= \text{const}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} t_2(x, 0) &= \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2; \\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 &= \text{const}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau); \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial x}; \quad (6)$$

$$t_1(-l_1, \tau) = t_1 = \text{const}; \quad (7)$$

$$t_1(l_2, \tau) = t_2 = \text{const}, \quad (8)$$

где λ_i ($i = 1; 2$) – коэффициент теплопроводности, Вт/(м °C).

Начальные условия (3), (4) представляют собой многочлены второй степени координаты x , которые наилучшим образом описывают линии температурного поля, а, кроме того, позволяют легко их аппроксимировать, используя метод наименьших квадратов. Как показывают расчеты, при средней абсолютной погрешности аппроксимации, составляющей около 1,0 °C, средняя абсолютная погрешность, которая получается при работе с подобными начальными условиями, составляет всего лишь 0,01 – 0,03 °C.

Граничные условия (5), (6) соответствуют идеальному тепловому контакту, а (7), (8) являются условиями I рода, что соответствует контактной схеме вулканизации эластомера.

Изображение по Лапласу решения системы уравнений (1)–(2) при данных краевых условиях может быть представлено в следующем виде

$$T_1(x, s) = C_1(s) \cdot \text{ch} \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} x \right) + C_2(s) \cdot \text{sh} \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} x \right) + \frac{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}{s} + \frac{2\alpha_1 a_1 + W_1}{s^2}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, s) &= C_1(s) \cdot \text{ch} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} x \right) + K_1 C_2(s) \cdot \text{sh} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} x \right) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{s} \text{ch} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} x \right) + \\ &+ \frac{2(\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2) + W_1 - W_2}{s^2} \text{ch} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} x \right) + \frac{1}{s} \frac{\lambda_1 \beta_1 - \beta_2}{\sqrt{\frac{s}{a_2}}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} x \right) + \\ &+ \frac{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2}{s} + \frac{2\alpha_2 a_2 + W_2}{s^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $W_i = w_i / (c_i \rho_i)$ ($i = 1; 2$) – приведенная удельная мощность источника тепла, °C/с;
 s – аргумент по Лапласу.

При этом коэффициенты $C_1(s)$, $C_2(s)$ рассчитываются по формулам

$$C_1(s) = \frac{F_{11}(s)}{s \cdot \varphi(s)} + \frac{F_{12}(s)}{s^2 \varphi(s)}; \quad C_2(s) = \frac{F_{21}(s)}{s \cdot \varphi(s)} + \frac{F_{22}(s)}{s^2 \varphi(s)},$$

где

$$F_{11}(s) = \left[t_2 - \alpha_2 l_2^2 - \beta_2 l_2 - \gamma_2 - (\gamma_1 - \gamma_2) ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta_1 - \beta_2 \right) l_2 \frac{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}{K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}}} \right] \times$$

$$\times \frac{sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)} + K_1 \cdot (t_1 - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1);$$

$$F_{12}(s) = - \left\{ \left[2(\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2) + W_1 - W_2 \right] ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) + 2\alpha_1 a_2 + W_2 \right\} \frac{sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)} -$$

$$- K_1 \cdot (2\alpha_1 a_1 + W_1);$$

$$F_{21}(s) = \left\{ \left[t_2 - \alpha_2 l_2^2 - \beta_2 l_2 - \gamma_2 - (\gamma_1 - \gamma_2) ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta_1 - \beta_2 \right) l_2 \frac{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}{K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}}} \right] ch \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) - \frac{1}{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)};$$

$$\left. - (t_1 - \alpha_1 l_1^2 + \beta_1 l_1 - \gamma_1) ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) \right\}$$

$$F_{22}(s) = - \left\{ \left[2(\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2) + W_1 - W_2 \right] ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_2 a_2 + W_2 \right\} ch \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) - \frac{1}{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)};$$

$$\left. - (2\alpha_1 a_1 + W_1) ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) \right\}$$

$$\varphi(s) = K_1 ch \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) + ch \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right) \frac{sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}{sh \left(K_2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1 \right)}; \quad K_1 = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{l_2}{l_1}.$$

В данной ситуации, когда переход от изображения решения к представлению его оригинала в виде формул требует громоздких преобразований, выгоднее для каждого слагаемого под номером j вида

$$\frac{\Phi_j(x, s)}{s^k \varphi(s)} \quad (k = 1; 2)$$

применять формулу Ващенко-Захарченко [2]

$$t_j(x, \tau) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left(\frac{\Phi_j(x, s)}{\varphi(s)} e^{s\tau} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(x, s_m)}{\psi'_k(s_m)} e^{s_m \tau},$$

где $\psi(s) = s^k \varphi(s)$; $s_m = -\mu_m^2 \frac{a_1}{l_1^2}$, а μ_m ($m = 1, 2, 3 \dots$) – положительные корни характеристического уравнения

$$\sin \mu \cdot \cos(K_1 \mu) + K_1 \sin(K_1 \mu) \cdot \cos \mu = 0.$$

На рисунке представлены результаты расчетов температурного поля, проведенные по предлагаемой методике.

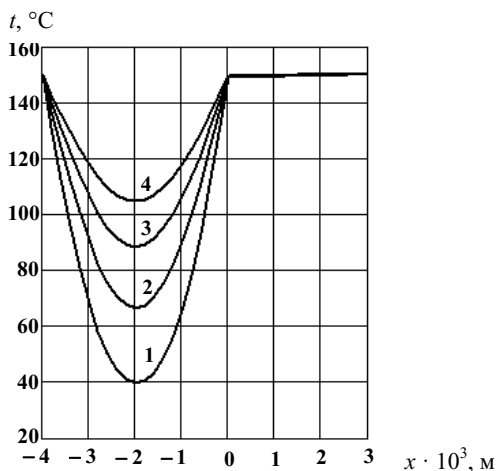


Рисунок. Результаты расчета линий температурного поля эластомерного покрытия на стальной пластине

Расчеты проведены применительно для слоя эластомера марки 2566 (НК+СКБ), нанесенного на пластину из стали Ст.3. При этом толщина слоя эластомера составляла $l_1 = 0,004$ м, а стальной пластины – $l_2 = 0,003$ м. Температура внешних поверхностей пластин была $150\text{ }^{\circ}\text{C}$, а температура на момент начала прогрева системы с последующей вулканизацией слоя эластомера была $30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Приведенным на рисунке линиям 1, 2, 3, 4 соответствовали значения времени $\tau = 5, 10, 15, 20$ с.

Представленные расчеты апробированы экспериментально, а предлагаемый метод может быть рекомендован для применения в инженерной практике при разработке оптимальных методов организации технологического процесса термической вулканизации эластомерных покрытий на металлических подложках.

Выводы

Необходимое качество эластомерных покрытий на металлических пластинах обеспечивают подбором такого сочетания параметров процесса термообработки, при котором достигается равномерность вулканизации покрытий, что осуществляется путем назначения рациональных условий внутреннего и внешнего теплообмена, а также за счет разработки оптимальных конструкций вулканизационных аппаратов.

Возможность проведения соответствующих расчетов, несмотря на их кажущуюся громоздкость и сложность, вполне реальна при использовании современных систем программного обеспечения и может быть рекомендована не только для проведения научных исследований, но и в инженерной практике.

Литература

1. Лукомская А.И., Баденков П.Ф., Кеперша Л.М. Тепловые основы вулканизации резиновых изделий. М., 1972. 43 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1952. 600 с.

References

1. Lukomskaia A.I., Badenkov P.F., Kipersha L.M. *Teplovyie osnovy vulkanizatsiui rezinovykh izdelii* [Heat bases of the rubber articles vulcanization]. Moscow, 1972. 43 p.
2. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Heat conduction theory]. Moscow, 1952. 600 p.

Аваев А.А., Осипов Ю.Р. Математическая модель теплопереноса в процессе термической вулканизации покрытия из эластомера на металлической пластине // Вестник Череповецкого государственного университета. 2018. №1 (82). С. 14–19.

For citation: Avaev A.A., Osipov Y.R. Mathematic model of the heat transfer during thermal vulcanization of elastomer coat on the metal plate. *Bulletin of the Cherepovets State University*, 2018, no. 1 (82), pp. 14–19.